M1 info : Bases du Traitement du Signal et des images

Examen final - Durée : 2h

9 janvier 2018

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les différentes sous-parties peuvent être traitées dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'une même sous-partie dans la copie.

1 Questions de cours

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

1.1 Signaux 1D (2 points)

a) Soit une fonction de la fréquence $X(\nu)$, non nulle sur un intervalle $[-B; B]$ et qui s'annule pour toute fréquence $\nu > B$ ou $\nu < -B$. Pourquoi cette fonction ne peut-elle être le spectre d'un signal échantillonné ?

b) Qu'appelle-t-on la *réponse impulsionnelle* d'un filtre ?

1.2 Image (3 points)

a) Quelles sont les trois grandes catégories de transformation d'images ? Décrivez le principe général pour chacune de ces catégories.

b) Donnez un exemple de tranformation dans chacune des trois catégories.

2 Exercices

Rappel : Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

2.1 Exercice Image (4 points)

Sur la figure suivante, vous pouvez voir une image originale d'un os obtenu par transmission de rayons X, et son image de gradient correspondante qui affiche la norme du gradient calculée pour chaque pixel.

- Donner un exemple de filtre qui pourrait être utilisé pour calculer les vecteurs gradient.
- Donner la définition mathématique de la norme du gradient.
- Si vous seuillez l'image gradient pour extraire le contours des os, mettez en évidence au moins deux problèmes auxquels vous risquez d'être confronté.

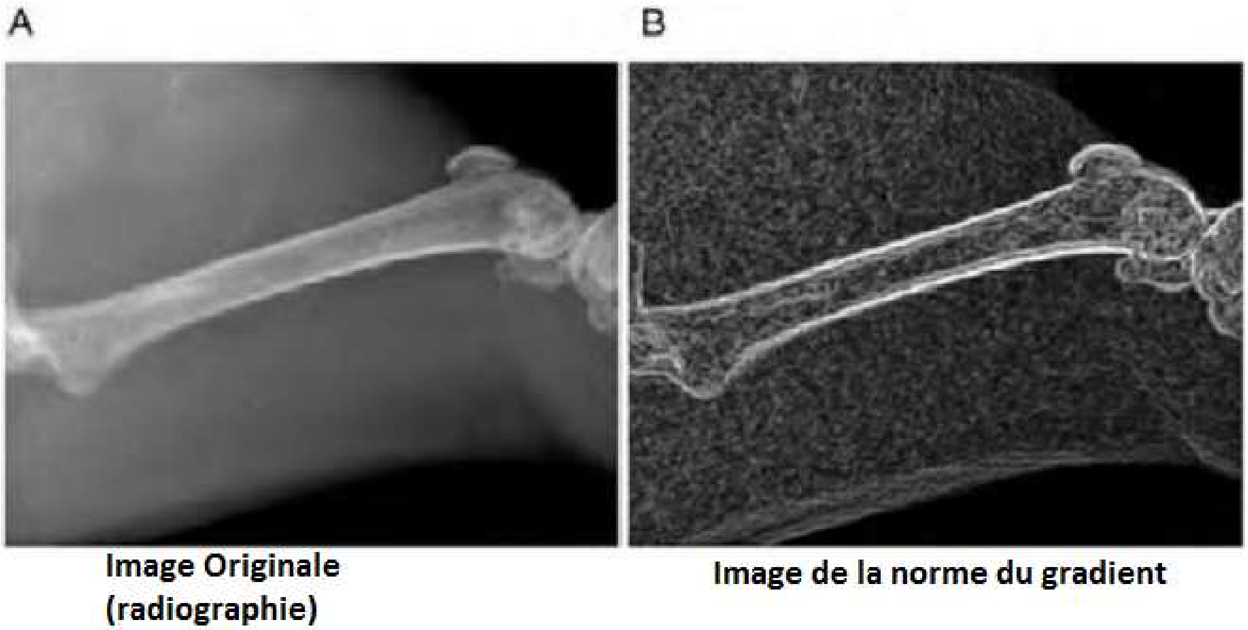

FIGURE 1 – Figure de l'exercice image.

2.2 Echantillonnage signaux 1D (4 points)

Soient les signaux

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{sinc}^2(\pi\nu_0 t) \\ y(t) &= \nu_0 \operatorname{sinc}(\pi\nu_0 t) \end{aligned}$$

Les transformées de Fourier de ces signaux sont des fonctions **réelles** de la fréquence, représentées respectivement sur les figures 2 et 3.

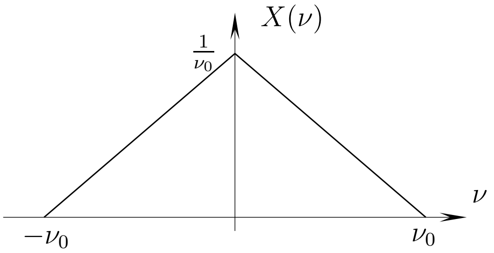

FIGURE 2 – Spectre de $x(t)$.

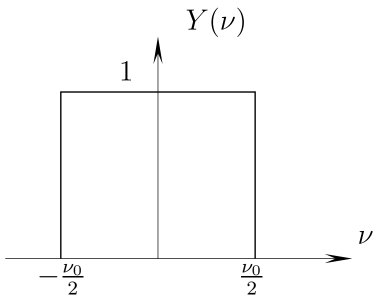

FIGURE 3 – Spectre de $y(t)$.

a) On échantillonne $x(t)$ à une fréquence ν_e. Représenter le spectre du signal échantillonné, $X_e(\nu)$, pour $\nu_e = \nu_0$ et pour $\nu_e = 3\nu_0$. Commentez.

b) On cherche à reconstruire $x(t)$ à partir de sa version échantillonnée par un filtrage passe-bas idéal de fréquence de coupure $\nu_e/2$. Donner l'expression du signal reconstruit $\tilde{x}(t)$ pour $\nu_e = \nu_0$ et pour $\nu_e = 3\nu_0$.

Source : Jean-Yves Tourneret, ENSEEIHT, janvier 2010

2.3 Filtrage numérique 1D (4 points)

Soit un filtre numérique défini par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = \rho y(n-1) + x(n) + x(n-2)$$

Son diagramme pôle-zéros est représenté sur la figure 4 pour $\rho = 0,9$.

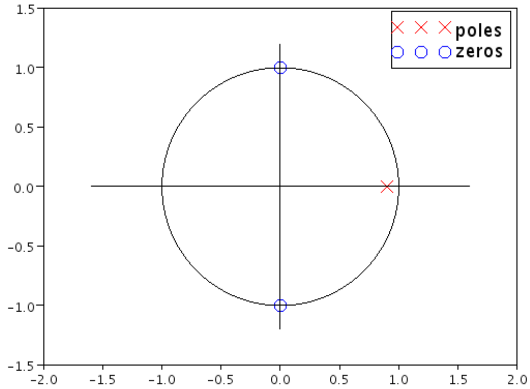

FIGURE 4 – Diagramme pôles-zéros du filtre.

a) Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Calculer sa fonction de transfert.

b) Le filtre est-il stable ou instable ? (justifier)

c) Dessinez l'allure de sa réponse fréquentielle.

d) On filtre un signal composé de deux sinusoïdes, de fréquences respectives 1/8 et 1/4 (en fréquences normalisées). Quel est le signal en sortie du filtre ?

2.4 Analyse spectrale numérique 1D (3 points)

On souhaite visualiser le spectre d'un signal composé de deux sinusoïdes de même amplitude, de fréquences respectives 1000 et 1100 Hz, échantillonné à 8000 Hz. Pour cela, on prélève N échantillons, on complète éventuellement par des zéros (zero-padding) et on calcule la transformée de Fourier discrète.

a) Quel doit être la valeur minimale de N pour assurer une résolution fréquentielle suffisante ?

b) A présent, la sinusoïde à 1100 Hz a une amplitude inférieure de 20 dB à celle de la sinusoïde à 1000 Hz. Si l'on fixe $N = 256$, le spectre du signal ne fait pas apparaître le pic correspondant à la sinusoïde à 1100 Hz. Pourquoi ?

c) Pour résoudre ce problème, on pondère la séquence de 256 échantillons par une fenêtre de Hamming. Mais on ne voit toujours pas le pic correspondant à la sinusoïde à 1100 Hz. Pourquoi ?

3 Formulaire

Transformée de Fourier d'un signal analogique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t \\
\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu \\
\mathrm{TF}[s(t-a)] &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu) \\
\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= S(\nu-\nu_0) \\
\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= \delta(\nu-\nu_0)
\end{aligned}$$

Durée utile T d'un signal réel $s(t)$:

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s(t)^2\mathrm{d}t$$

Largeur utile B du spectre du signal :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2\mathrm{d}\nu$$

Relation d'incertitude :

$$T.B \geq \frac{1}{\pi}$$

Transformée de Fourier à temps discret :

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}(s[n]) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$

Formule de Poisson : pour un signal analogique de transformée de Fourier (TF) $S(\nu)$, la TF du signal échantillonné à la fréquence ν_e vaut :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

Réponse fréquentielle :

— Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(n)$, réponse fréquentielle :

$$H(f) = \mathrm{TFTD}[h(n)]$$

— Relation entrée-sortie :

$$y(n) = h(n) * x(n) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f)$$

Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \mathrm{TZ}[x(n)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)z^{-n}$$

Théorème du retard :

$$\mathrm{TZ}[x(n-k)] = z^{-k}\mathrm{TZ}[x(n)]$$

La TZ transforme le produit de convolution en produit simple :

$$\mathrm{TZ}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z)$$

$\mathrm{TFTD}[x(n)] = \mathrm{TZ}[x(n)]$ calculée en $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f}$
Soit un signal discret $x(n)$ de durée finie N :

$$x(n) = 0 \quad \forall\, n < 0 \text{ ou } n \geq N$$

— Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de x :

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f}$$

— Transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$\mathrm{TFD}[x(n)] = X[k] = X(f = \frac{k}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} \quad \forall\, 0 \leq k \leq N-1$$

TFD inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi k n}{N}} = \mathrm{TFD}^{-1}[X[k]] \quad \forall\, 0 \leq n \leq N-1$$

Types de fenêtres et largeur du lobe principal en fréquence normalisée :

Fenêtre	*Largeur du lobe principal (fréq. normalisée)*	*Ecart d'amplitude lobes principal/secondaire (dB)*
Rectangle	$2/N$	13
Triangle	$4/N$	25
Hanning	$4/N$	31
Hamming	$4/N$	41
Blackman	$6/N$	57