Correction du partiel du 13 mars 2013

(2.1) Détection de symboles

a) Pour chaque symbole S_i,
$\overline{R_i}$ = détection d'un des 3 plus proches voisins de S_i

Comme les événements $R_j | S_i$ sont disjoints,
$P(\overline{R_i} | S_i) = p + p + p = 3p$

b) $e = \bigcup_{i=1}^{8} \{(S_i, \overline{R_i})\}$

$\rightarrow P_e = \sum_{i=1}^{8} P(S_i, \overline{R_i})$ car les événements $(S_i, \overline{R_i})$ sont disjoints

$= \sum_{i=1}^{8} P(\overline{R_i} | S_i) P(S_i)$

$= \sum_{i=1}^{8} 3p \times \frac{1}{8}$

$= 3p$

2.2) Codage de canal

a) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b)

$00 \rightarrow 00000$	$10 \rightarrow 10101$
$01 \rightarrow 01011$	$11 \rightarrow 11110$

d_{min} = poids de Hamming minimal non nul
$= 3$

→ pouvoir de détection $= d_{min} - 1 = 2$
→ pouvoir de correction $= \left\lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \right\rfloor = 1$

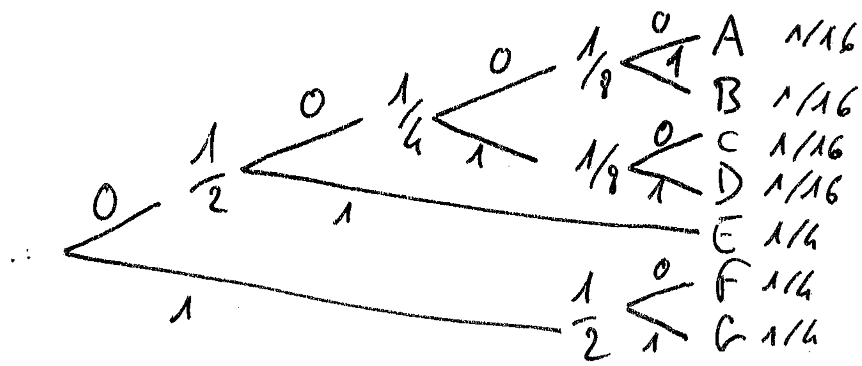
c) Proba (1 erreur dans c)
= nombre de motifs de 1 erreur × proba de chaque motif
$= 5p(1-p)^4$

Pour une transmission sans codage,
P(transmission correcte) $= (1-p)^2$
Avec codage,
P(transmission correcte)
$= P(0 \text{ erreur}) + P(1 \text{ erreur})$ (puisque 1 erreur corrigible)
$= (1-p)^5 + 5p(1-p)^4$

Sans codage, $P_e = 1 - (1-p)^2 \simeq 2p$
Avec codage, $P_e = 1 - (1 - 5p + 10p^2 + \dots) - 5p(1 - 4p + 6p^2 + \dots)$
$\simeq 10p^2 \ll 2p$ si $p \ll 1$

2.3) Codage de source

a)



A : 0000 E : 01
B : 0001 F : 10
C : 0010 G : 11
D : 0011

b) Pour A, B, C, D : $I = -\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = 4 =$ longueur du code

Pour E, F, G : $I = -\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = 2 =$ ———

c) Longueur moyenne :

$$L = \sum_{i=1}^{7} n_i P(x_i) = 4 \times 4 \times \frac{1}{16} + 3 \times 2 \times \frac{1}{4}$$
$$= 2{,}5$$

Entropie : $H(X) = L$ car $n_i = I(x_i)\ \forall i$

$\rightarrow$ efficacité $= 100\,\%$

d) Pour N grand, $H(X) \simeq \frac{L}{N}$

ce qui maximise l'efficacité du codage.

Ici, c'est inutile puisqu'on a déjà 100 % d'efficacité