Université de Paris / UFR de Mathématiques et Informatique
L3 MI

Systèmes de Communication

Examen de rattrapage (1h30) - 26 juin 2023

- Documents et appareils électroniques interdits
- Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié.
- Les exercices peuvent être abordés dans n'importe quel ordre, mais les réponses à un même exercice ne doivent pas être dispersées dans la copie (risque de non-correction).
- **Tout calcul doit être expliqué.**
- Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.

1 Questions de cours (5 points)

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois.

a) Qu'appelle-t-on un *canal binaire symétrique* ?

b) Qu'est-ce qui permet de séparer le flux binaire d'un utilisateur de ceux des autres dans un multiplexage par code (CDMA) ?

c) Pourquoi appelle-t-on les communications utilisant le CDMA des communications *à étalement de spectre* ?

d) Sur un canal radio-mobile, qu'est-ce que *l'effet Doppler* et comment se traduit-il sur le signal démodulé ?

e) En téléphonie mobile, après le codage de source, pourquoi le codage de canal ne code-t-il pas tous les bits de la même manière ? Pourquoi ajoute-t-on une étape d'entrelacement des bits ?

2 Exercices

2.1 Codage de canal convolutif (3 points)

a) Le codeur convolutif dont le diagramme d'états est représenté sur la figure 1 est initialisé à l'état 00. Si l'on code la séquence 1011, quelle est la sortie ?

b) Lors du codage d'une séquence, on doit toujours compléter la séquence par un nombre constant de 0 pour remettre le codeur à l'état 00. Quel doit être la valeur minimale de ce nombre pour revenir à l'état 00 dans tous les cas ?

c) Supposons que l'on code une longue séquence de 0. Sans faire de diagramme en treillis, montrer que 3 erreurs lors de la transmission suffisent à produire une infinité d'erreurs en réception lors du décodage.

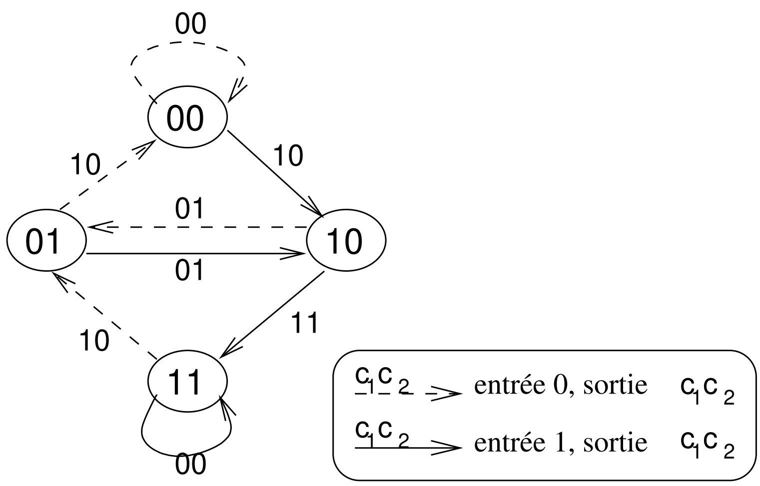

FIGURE 1 – Diagramme d'états d'un codeur convolutif $\mathcal{C}(2, 1, 3)$ (entrée 1 bit, sortie 2 bits).

2.2 Codage de source (6 points)

Le codage auto-régressif de la voix se déroule comme suit. Le signal vocal s est échantillonné à 8kHz, découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i),$$

tel que le siqnal e a une variance unité.

Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$ quantifiés, le codeur de parole transmet donc, pour chaque tranche de 20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 160 échantillons $e(n)$.

a) Pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 171 valeurs que les 160 échantillons de s ?

b) Les échantillons $e(n)$ sont quantifiés sur $L = 5$ éléments binaires par échantillon, ils peuvent donc prendre 32 valeurs. Si les 32 valeurs sont équiprobables, quelle est l'entropie de e ?

c) En fait, les valeurs de e ne sont pas du tout équiprobables, de sorte que l'entropie de e, notée $\mathrm{H}(e)$, vaut 3. Quelle est l'efficacité du codage de e de la question précédente ?

d) Au lieu de coder les échantillons de e un par un, on les groupe par 4. On note e^4 cette source. Sous l'hypothèse que la source e est sans mémoire, quelle est son entropie $\mathrm{H}(e^4)$?

e) On va réaliser un codage entropique, c'est-à-dire coder chacune des 32^4 combinaisons possibles de e^4 par un mot de longueur variable, de telle sorte que la longueur moyenne L_4 soit minimale. D'après le théorème du codage, dans quel intervalle se situe L_4 ? En déduire le nombre moyen L' (arrondi à l'entier près) d'éléments binaires par échantillon de e. Comparer l'efficacité de ce codage avec celle trouvée à la question c.

f) En supposant que 60 bits sont nécessaires en tout au codage des a_i et de σ_e pour chaque tranche de 20ms, calculez le débit et comparez avec celui qu'on obtiendrait en quantifiant simplement chaque échantillon de s sur 10 éléments binaires. (Si vous n'avez pas trouvé L', utilisez L à la place)

2.3 Modulation et adaptation au canal (6 points)

On considère une transmission par modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature à 16 états (MAQ-16), dont le schéma de principe de l'émetteur est représenté sur la figure 2 (ici, $n = 2$).

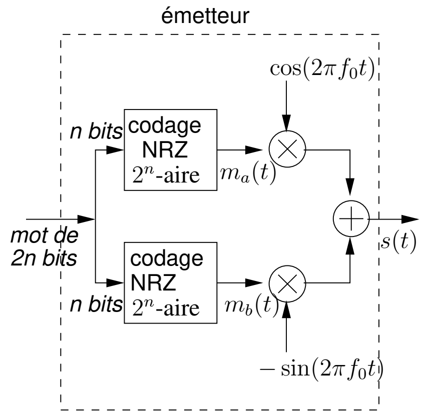

FIGURE 2 – Émetteur MAQ

a) Expliquez en quoi consiste la démodulation dans le récepteur MAQ.

b) Dessinez la constellation des symboles en indiquant sur chaque symbole le mot binaire qu'on peut lui associer en faisant un codage de Gray.

c) Les modulants m_a et m_b sont formés en utilisant des impulsions en cosinus surélevé de facteur de retombée α. Leur densité spectrale de puissance (DSP) est représentée sur la figure 3. Dessinez la DSP du signal émis s et donnez l'expression de sa largeur.

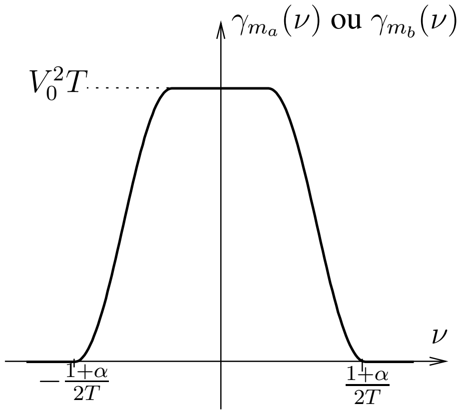

FIGURE 3 – DSP d'un signal NRZ durée symbole T avec des impulsions en cosinus surélevé.

d) Le canal a une bande passante $\mathcal{B}$ autour de f_0. Exprimez le débit maximal D sans interférence entre symboles permis par cette bande passante, en fonction de $\mathcal{B}$ et α. Calculez ensuite sa valeur pour $\alpha = 0,5$ et $\mathcal{B} = 1,5$ MHz.

Annexes

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

— l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i)\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

— Théorème du codage : $L \geq \mathrm{H}(X)$ et il existe un code à décodage unique et instantané tel que :

$$\mathrm{H}(X) \leq L < \mathrm{H}(X) + 1$$

— L'efficacité du code vaut :

$$\eta = H(X)/L$$