Systèmes de communications
Correction de l'examen du 3 mai 2017

1) Parce que pour une même qualité audio, les échantillons $e(n)$ peuvent être codés sur environ 2 fois moins de bits que les $s(n)$, ce qui réduit le débit.

2) $$H(e) = -\sum_{i=1}^{32} P(x_i) \log_2 P(x_i)$$ avec $x_1 \dots x_{32}$ les 32 valeurs possibles de $e(n)$

$$= -\frac{1}{32} \sum_{i=1}^{32} \log_2\left(\frac{1}{32}\right)$$

$$= \log_2(32)$$

$$= 5$$

3) D'après le théorème du codage, il existe un code (à décodage unique et instantané) tel que $3 \leq L < 4$

4) Si e est sans mémoire, $H(e^4) = 4 H(e) = 12$

5) Selon le théorème du codage,

$$H(e^4) \leq L_4 < H(e^4) + 1$$

$$H(e) \leq \frac{L_4}{4} < H(e) + \frac{1}{4}$$

Le nombre moyen d'éléments binaires par échantillon de e vaut $\frac{L_4}{4}$, donc environ $H(e)$, soit 3

6) Débit $= \dfrac{\text{nombre de bit par trame}}{\text{durée d'une trame}}$

$$= \frac{(160 \times 3 + 40)\ \text{bits/trame}}{20 \cdot 10^{-3}\ \text{s/trame}}$$

$$= \frac{520 \cdot 10^{3}}{20}\ \text{bit/s}$$

$$= 26\ \text{kbit/s}$$

Si l'on quantifiait chaque échantillon de s sur 8 bits, le débit serait de 8000 éch/s × 8 bit/éch., soit 64 kbit/s. On a donc divisé le débit par environ 2,5

7) Le codeur de canal a un rendement 1/2
Le débit en sortie est donc de 52 kbit/s

8) Pour une entrée 01001, la sortie vaut :
00 11 10 11 11

9) Dans les deux cas, la bande passante nécessaire est $\frac{1+\alpha}{T}$, avec T la durée symbole.
- Pour la MDA-2, $T = \frac{1}{D}$, donc $BP = (1+\alpha)D$
- Pour la MAQ-4, $T = \frac{2}{D}$, donc $BP = (1+\alpha)\frac{D}{2}$

La MAQ-4 permet donc d'économiser de la bande passante, à débit constant.

10) Plus généralement, à bande passante, probabilité d'erreur et énergie par élément binaire fixées,
MAQ > MDP > MDA pour le débit

11) L'IES est négligeable si la durée symbole $T \gg \tau_{max}$

Ici, $T = \frac{1}{D}$ ou $\frac{2}{D}$, soit $\frac{1}{50.10^3}$ s ou $\frac{2}{50.10^3}$ s

$$T = 2.10^{-5}\,s \text{ ou } 4.10^{-5}\,s \gg 0{,}1\,\mu s \; (10^{-7}\,s)$$

Donc l'IES est négligeable

12) $S^i . S^j \simeq 2\sqrt{255} \simeq 32$ et $S^i . S^i = 255$

Donc $\frac{S^i S^j}{S^i S^i} \ll 1$

D'autre part, V_{i,f_0} est toujours plus proche de sa base B_i que des autres bases $B_{j \neq i}$

Donc $\frac{V_{i,f_0} B_i}{V_{i,f_0} B_j} < 1$, voire $\ll 1$ si les cellules sont assez éloignées

Par conséquent, $\tilde{a}_i \approx a_i$

13) $D' = 255\,D = 255 \times 50$ kbit/s $= 12\,750$ kbit/s

14) $T' = \frac{1}{D'} = \frac{T}{255} \approx 10^{-7} = \tau_{max}$

donc l'IES n'est plus négligeable.

15) La bande est multipliée par 255 :

Bande occupée $= (1+\alpha)\,255\,D$

$= 1{,}5 \times 12\,750$ kHz

$= 19\,125$ kHz

16) Une cellule peut donc accueillir 10 communications simultanées

17) Il suffit de faire un produit scalaire par p_i
En effet,

$$\langle S \mid p_i \rangle = \sum_{k=1}^{N} X_k \langle h(t) p_k \mid p_i \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{N} X_k \underbrace{\langle p_k \mid p_i \rangle}_{= 0 \text{ si } k \neq i,\ 1 \text{ si } k = i}$$

$$= X_i$$

18) Les porteuses n'étant séparées que de D' au lieu de $(1+\alpha)D'$, on peut partager la bande entre 1,5 fois plus d'utilisateurs, soit 15