Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique - L3

Systèmes de Communication

Epreuve de contrôle continu (1h30) - 18 mars 2016

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les quatre parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (7 points)

a) Lors du décodage d'un code en bloc par la méthode du syndrome, que peut-on conclure si celui-ci est égal au vecteur nul ?

b) Qu'est-ce que l'entropie d'une source ? (on ne demande pas la formule mathématique, mais le sens de cette notion, exprimé en français clair)

c) Dans le codage d'une trame MPEG-1 couche 1, le nombre de bits n_i par échantillon dans chaque bande i doit respecter deux contraintes :

— chaque n_i doit être supérieur à une certaine valeur
— la somme des n_i doit être inférieur à une autre valeur

A quelles contraintes physiques correspondent ces deux contraintes mathématiques ?

d) Un signal vocal s peut être découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle dit auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i)$$

C'est-à-dire que chaque échantillon $s(n)$ est une combinaison linéaire des précédents, plus un terme d'innovation $\sigma_e e(n)$, tel que la puissance de e vaut 1. Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$ quantifiés, un codeur de parole peut donc transmettre, pour chaque tranche de 20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 160 échantillons $e(n)$ (pour un échantillonnage à 8 kHz). Sur une liaison à débit réduit, pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 171 valeurs que les 160 échantillons de s ? Si l'on code chaque échantillon de e sur 5 bits et l'ensemble $\{(a_i)_{1\leq i\leq 10}; \sigma_e\}$ sur 100 bits, quel est le débit du codeur ?

e) La probabilité d'erreur binaire d'une transmission NRZ binaire est donnée par :

$$P_e = Q\left(\frac{V_0\sqrt{T}}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

où V_0 désigne la tension des symboles émis, T la durée des symboles et $N_0/2$ la densité spectrale de puissance du bruit du canal. La fonction Q est définie par :

$$Q : x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2} \mathrm{d}z$$

On considère une telle transmission, sur un câble métallique faisant partie d'une nappe de câbles en activité. Sur quels paramètres de cette liaison peut-on agir (préciser comment) pour réduire P_e ? Pour chacun, quel est l'inconvénient de l'action proposée ?

2 Exercices

2.1 Codage de canal en bloc (4 points)

Soit un code en bloc linéaire défini par la matrice génératrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Construire l'ensemble des mots de code. Quelle est la distance minimale de ce code ? En déduire les pouvoirs de détection et de correction.

b) On reçoit le mot $r = 111011$. Décoder r selon la distance minimale (*i.e.* en recherchant le mot de code le plus proche du mot reçu). Ce décodage est-il fiable ? (justifier votre réponse).

2.2 Codage de source (5 points)

a) Soit une source binaire sans mémoire X telle que $\mathrm{P}(1) = p \ll 1$ et $\mathrm{P}(0) = 1 - p$. Sachant que pour $p \ll 1$, $(1-p)\log_2(1-p) \sim -p/ln(2)$, montrez que l'entropie de X peut être approchée par : $H(X) \sim -p\log_2(p)$.

b) On groupe maintenant les éléments binaires de X par mots de 2. On note X^2 la nouvelle source ainsi constituée.

— Calculer, en fonction de p, la probabilité de chaque mot (sans approximations)

— Quelle est l'entropie de X^2 ?

— Construire un code de Huffman de X^2

— Calculer la longueur moyenne des mots de code

— En déduire l'efficacité du codage et comparer avec celle de la question a (sans regroupement des éléments binaires).

2.3 Détection de symboles (4 points)

On considère une transmission binaire sur un canal de communication discret. L'entrée du canal vaut 0 ou 1 de manière équiprobable, la sortie, notée z, peut prendre les valeurs -3, -1, 1 ou 3, selon les probabilités conditionnelles indiquées dans le tableau 1. On note s_i l'événement « émission du bit i » et r_i l'événement « détection du bit i en réception ».

i	z	$\mathrm{P}(z\|s_i)$
0	-3	β
0	-1	α
0	1	β
0	3	0
1	-3	0
1	-1	β
1	1	α
1	3	β

TABLE 1 – Probabilités conditionnelles $\mathrm{P}(z|s_0)$ et $\mathrm{P}(z|s_1)$.

a) On détecte 0 si $z < 0$ et 1 si $z > 0$. Calculer $\mathrm{P}(r_0|s_1)$ et $\mathrm{P}(r_1|s_0)$.

b) Ecrire l'événement erreur comme un sous-ensemble de l'ensemble des couples (s_i, r_j) et calculer la probabilité d'erreur P_e.

3 Annexes

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

— l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i)\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

— si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i)n_i$$

— L'efficacité du code vaut :

$$\eta = H(X)/L$$

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$