Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique - L3 MIA

Systèmes de Communication

Epreuve de contrôle continu (1h30) - 18 mars 2015

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Il est attendu la plus grande rigueur dans la rédaction des réponses, qui devront être claires, courtes et précises à la fois. *Les quatre parties peuvent être abordées dans l'ordre qui vous conviendra, mais les réponses à chaque partie ne devront pas être dispersées dans la copie. Vous trouverez en annexe quelques compléments éventuellement utiles.*

1 Questions de cours (9 points)

a) Lors du décodage d'un code en bloc, comment calcule-t-on le syndrôme [1] ? S'il est égal au vecteur nul, que peut-on conclure ?

b) Qu'est-ce que l'entropie d'une source ? (on ne demande pas la formule mathématique, mais la définition, *i.e.* la signification en français de la formule)

c) Dans le codage d'une trame MPEG-1 couche 1, le nombre de bits par échantillon dans chaque bande i doit respecter la relation $n_i > \frac{P^i_{\mathrm{dB}} - M_i + K}{6}$, où P^i_{dB}, M_i et K désignent respectivement la puissance du signal, le seuil de masquage dans la i^{eme} bande et une constante. Quelle contrainte auditive traduit cette formule ? Si le canal de communication impose un certain débit, quel problème peut poser cette contrainte sur les n_i ? Par quel mécanisme y remédie-t-on dans le codeur MP3 ? *(ne pas donner simplement le nom du mécanisme, mais expliquer en quoi il consiste)*

d) Un signal vocal s peut être découpé en tranches de 20 ms et représenté, sur chaque tranche, par un modèle dit auto-régressif d'ordre 10 :

$$s(n) = \sigma_e e(n) - \sum_{i=1}^{10} a_i s(n-i)$$

C'est-à-dire que chaque échantillon $s(n)$ est une combinaison linéaire des précédents, plus un terme d'innovation $\sigma_e e(n)$, tel que la puissance de e vaut 1. Au lieu de transmettre les échantillons $s(n)$ quantifiés, un codeur de parole peut donc transmettre, pour chaque tranche de 20 ms, les coefficients a_1 à a_{10}, σ_e et la suite des 160 échantillons $e(n)$ (pour un échantillonnage à 8 kHz). Sur une liaison à débit réduit, pourquoi est-il plus intéressant de transmettre ces 171 valeurs que les 160 échantillons de s ?

1. Pas de formule sans expliquer en français la signification de chaque variable !

e) Le spectre d'amplitude et le seuil de masquage d'une séquence de signal audio sont représentés sur la figure 1. Si le codage est effectué dans le domaine fréquentiel, indiquez un moyen simple de comprimer le signal sans distorsion audible.

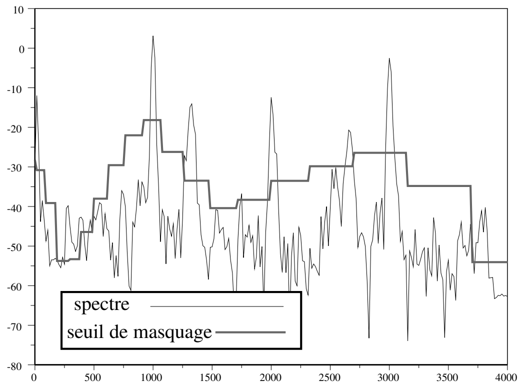

FIGURE 1 – Spectre d'amplitude et seuil de masquage d'une séquence de 32 ms de violon.

f) La probabilité d'erreur binaire d'une transmission NRZ M-aire est donnée par :

$$P_e = 2\frac{M-1}{M\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{6E_b\log_2 M}{N_0(M^2-1)}}\right)$$

où E_b désigne l'énergie par élément binaire et $N_0/2$ la densité spectrale de puissance du bruit du canal, Q étant définie par :

$$Q : x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2}\mathrm{d}z$$

On considère une telle transmission, sur un câble métallique faisant partie d'une nappe de câbles en activité. M étant fixé, sur quels paramètres de cette liaison peut-on agir pour réduire P_e ? Pour chacun, quel est l'inconvénient de l'action proposée ?

g) On considère une communication en bande de base utilisant des symboles NRZ M-aires. Après filtrage adapté du signal reçu, celui-ci est échantillonné au rythme des symboles. La figure 2 représente les échantillons successifs sur une durée de 10s. Quelle est vraisemblablement la valeur de M et quel est l'intervalle de décision associé à chaque symbole ?

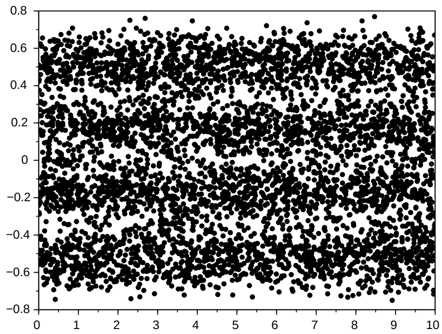

FIGURE 2 – Echantillons reçus dans une communication en bande de base.

2 Exercices

2.1 Codage de canal convolutif (3 points)

La figure 3 représente le diagramme en treillis d'un codeur convolutif et le début du décodage d'une séquence selon l'algorithme de Viterbi. Indiquez les métriques de branches et les métriques cumulées entre $t2$ et $t3$ (uniquement) comme indiqué sur la légende et supprimez les branches adéquates. Peut-on dès à présent décoder le début de la séquence ? Si oui, faites-le.

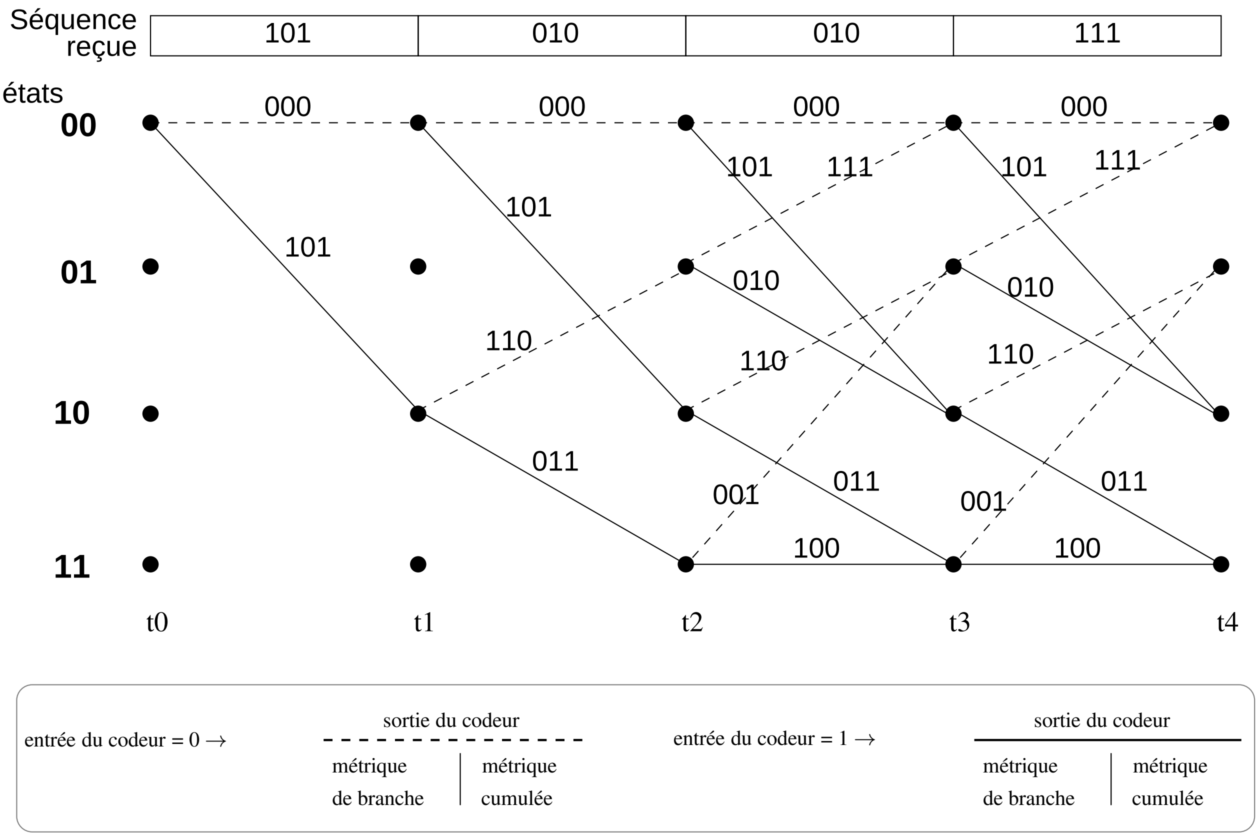

FIGURE 3 – Diagramme en treillis et décodage selon l'algorithme de Viterbi.

2.2 Codage de source (4 points)

Une source sans mémoire X génère des symboles A, B, C, D avec une probabilité $1/16$ et E, F, G avec une probabilité $1/4$.

a) Réaliser un codage de Huffman de cette source.

b) Comparer l'information de chaque symbole avec la longueur du mot binaire associé. Montrer que la longueur moyenne d'un mot de code est égale à l'entropie de la source

c) D'après le théorème du codage, si l'on groupe les symboles d'une source X par paquets de N, alors il existe un code tel que le nombre moyen d'éléments binaires par symbole, L/N, vérifie :

$$H(X) \leq \frac{L}{N} \leq H(X) + \frac{1}{N}$$

où $H(X)$ est l'entropie par symbole. Quel est l'intérêt de ce résultat dans le cas général ? Cet intérêt existe-t-il pour la source considérée ici ?

2.3 Détection de symboles (4 points)

Soit un canal de communication modélisé par l'ajout d'un bruit. On émet des symboles binaires équiprobables. Pour chaque symbole émis S_i, le récepteur traite, après filtrage adapté et échantillonnage, une valeur $z = s_i + b$, telle que :

- $s_0 = -A$, avec $A > 0$
- $s_1 = A$
- b est une variable aléatoire de densité de probabilité **uniforme** sur un intervalle $[-\Delta/2; \Delta/2]$. La densité de probabilité de b, représentée sur la figure 4, est donc définie par :

$$p(b) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{si } b \in [-\Delta/2; \Delta/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

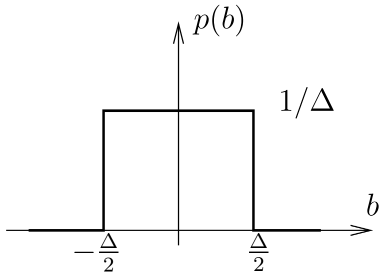

FIGURE 4 – Densité de probabilité du bruit de canal b.

La valeur échantillonnée z a donc une densité de probabilité telle que représentée sur la figure 5, selon le symbole émis.

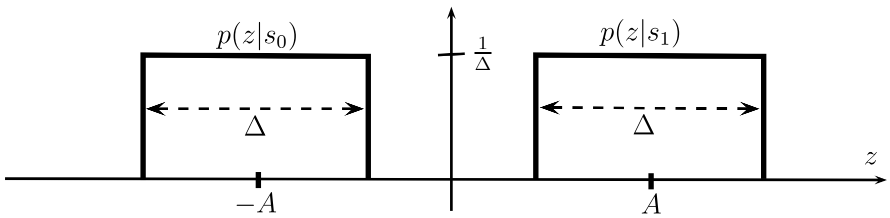

FIGURE 5 – Densités de probabilité conditionnelle $\mathrm{p}(z|s_0)$ et $\mathrm{p}(z|s_1)$.

a) On détecte s_0 si $z < 0$ et s_1 si $z > 0$. Pour quelles valeurs de Δ n'a-t-on jamais d'erreur ?

b) Supposons $\Delta/2 > A$. On note r_i désigne l'événement "détection du symbole i". Calculer $\mathrm{P}(r_0|s_1)$ et $\mathrm{P}(r_1|s_0)$. (aidez-vous éventuellement d'un dessin de $\mathrm{p}(z|s_0)$ et $\mathrm{p}(z|s_1)$)

c) Ecrire l'événement erreur sous forme ensembliste et calculer la probabilité d'erreur P_e.

3 Annexes

Codage de source

Pour une source X délivrant des symboles x_i, $1 \leq i \leq N$,

- l'information portée par un symbole x_i est définie par

$$I(x_i) = -\log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

- l'entropie de la source est définie par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) \log_2(\mathrm{P}(x_i))$$

- si l'on code chaque symbole x_i sur n_i éléments binaires, la longueur moyenne d'un mot de code vaut :

$$L = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(x_i) n_i$$

Probabilités

Soient A et B deux événements.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Règle de Bayes :

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$$

Soient une variable aléatoire Z et deux réels a et b :

$$\mathrm{P}(a < Z < b) = \int_a^b \mathrm{p}(z)\mathrm{d}z$$