Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Probabilités et statistiques pour l'informatique - Licence MIA 2e année
Examen du 6 janvier 2016 - Correction

Exercice 1

1. On peut tirer au maximum 4 boules car si on tire une boule rouge pour chacun des trois premiers tirages, alors il ne reste plus de boule rouge dans l'urne A et donc on tire forcément une boule verte au quatrième tirage. Donc le support de X est $\{1, 2, 3, 4\}$. On a

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \frac{2}{5} \\
&\quad \text{(probabilité de tirer une boule verte dès le premier tirage)}, \\
P(X=2) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10} \\
&\quad \text{(probabilité de tirer une boule rouge au 1er tirage puis une boule verte au 2e)}, \\
P(X=3) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \\
&\quad \text{(probabilité de tirer deux boules rouges puis une verte)}, \\
P(X=4) &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{10} \\
&\quad \text{(probabilité de tirer trois boules rouges puis une verte)},
\end{aligned}$$

2. $P(E|X=1) = 1$ puisque si $X = 1$ c'est qu'on a tiré une boule verte de l'urne A dès le premier tirage, et donc qu'on ne peut tirer que cette boule verte de l'urne B. Ensuite,

$$\begin{aligned}
P(E|X=2) &= \frac{1}{2} \text{ (car si } X=2 \text{ l'urne B contient une boule verte et une rouge)}, \\
P(E|X=3) &= \frac{1}{3} \text{ (car si } X=3 \text{ l'urne B contient une boule verte et deux rouges)}, \\
P(E|X=4) &= \frac{1}{4} \text{ (car si } X=4 \text{ l'urne B contient une boule verte et trois rouges)}.
\end{aligned}$$

3. D'après le formule des probabilités totales (les événements $[X=1]$, $[X=2]$, $[X=3]$, $[X=4]$ formant une partition de Ω), on a

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(E|X=1)P(X=1) + P(E|X=2)P(X=2) \\
&\quad + P(E|X=3)P(X=3) + P(E|X=4)P(X=4) \\
&= 1 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} \\
P(E) &= \frac{77}{120} \simeq 64\%
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On doit avoir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^\alpha ct^2 dt = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad c\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\alpha = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad c\,\frac{\alpha^3}{3} = 1,
\end{aligned}$$

   d'où $c = 3/\alpha^3$.

2. $$E(X) = \int_{\mathbb{R}} tf(t)dt = \frac{3}{\alpha^3}\int_0^\alpha t^3 dt = \frac{3}{\alpha^3}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^\alpha = \frac{3}{\alpha^3}\left(\frac{\alpha^4}{4}\right) = \frac{3\alpha}{4}.$$

3. Les variables X_n sont indépendantes et toutes de même loi que X, et l'espérance de X est bien définie, donc on peut appliquer la loi des grands nombres pourles variables X_n : la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ converge vers l'espérance $E(X)$ lorsque $n \to +\infty$.

4. $\bar{X}_n$ converge vers $E(X) = \frac{3\alpha}{4}$, donc $\frac{4}{3}\bar{X}_n$ converge vers α. Ainsi $\frac{4}{3}\bar{X}_n$ est un estimateur convergeant de α.

5. On a

$$E\left(\frac{4}{3}\bar{X}_n\right) = \frac{4}{3}E(\bar{X}_n) = \frac{4}{3}E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{4}{3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i),$$

   par linéarité de l'espérance. Or $E(X_i) = E(X) = \frac{3\alpha}{4}$ puisque les X_i ont même loi que X. Donc

$$E\left(\frac{4}{3}\bar{X}_n\right) = \frac{4}{3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{3\alpha}{4} = \frac{4}{3}\frac{1}{n}n\frac{3\alpha}{4} = \alpha.$$

   Ainsi l'estimateur est sans biais.

Exercice 3

1. Le saut de l'athlète suit une loi uniforme sur $[1.60, 2.10]$, donc la probabilité qu'il franchisse la hauteur 1.90 vaut

$$P(X_1 \geq 1.90) = \frac{2.10 - 1.90}{2.10 - 1.60} = \frac{2}{5}.$$

   Ceci se calcule en utilisant la densité de X_1 qui vaut

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2.10-1.60} = 2 \text{ si } 1.60 \leq t \leq 2.10 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   On a donc

$$P(X_1 \geq 1.90) = \int_{1.90}^{+\infty} f(t)dt = \int_{1.90}^{2.10} 2dt = 2(2.10 - 1.90) = 2 \times 0.2 = \frac{2}{5}.$$

2. Puisque les hauteurs des sauts X_n sont indépendants et de même loi, Y correspond donc au rang du premier succès lors de la répétition d'expériences identiques et de même probabilité $p = \frac{2}{5}$. Donc Y suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{5}$.
3. Calculons d'abord la probabilité de franchir la barre $2m$ lors d'un essai :

$$P(X_1 \geq 2.00) = \frac{2.10 - 2.00}{2.10 - 1.60} = \frac{1}{5}.$$

   Z correspond au rang du premier succès lors de la répétition d'expériences identiques et de même probabilité $q = \frac{1}{5}$, donc Z suit la loi géométrique de paramètre $q = \frac{1}{5}$.
4.

$$\begin{aligned} P(Z \leq k) &= \sum_{n=1}^{k} P(Z = n) = \sum_{n=1}^{k} q(1-q)^{n-1} = q\sum_{n=1}^{k}(1-q)^{n-1} = q\sum_{n=0}^{k-1}(1-q)^n \\ &= q\frac{1-(1-q)^k}{1-(1-q)} = 1-(1-q)^k = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^k. \end{aligned}$$

5. $[Y + Z \leq 3]$ signifie que l'athlète a franchit les deux barres en 3 sauts ou moins, ce uiq implique qu'il a franchit la première barre au premier ou au deuxième saut. Donc

$$\begin{aligned} P(Y+Z \leq 3) &= P(Y+Z \leq 3|Y=1)P(Y=1) + P(Y+Z \leq 3|Y=2)P(Y=2) \\ &= P(1+Z \leq 3|Y=1)P(Y=1) + P(2+Z \leq 3|Y=2)P(Y=2) \\ &= P(Z \leq 2|Y=1)P(Y=1) + P(Z \leq 1|Y=2)P(Y=2) \\ &= P(Z \leq 2)P(Y=1) + P(Z \leq 1)P(Y=2), \end{aligned}$$

   car Y et Z sont indépendantes. Donc

$$\begin{aligned} P(Y+Z \leq 3) &= \left(1-(1-q)^2\right)p + (1-(1-q))\,p(1-p) \\ &= \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^2\right) \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{9}{25} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{24}{125} = 19.2\% \end{aligned}$$

6. L'athlète est qualifié s'il franchit les deux barres en trois essais au plus, ce qui correspond exactement à $[Y + Z \leq 3]$. La prbabilité qu'il se qualifie est donc de

$$P(Y+Z \leq 3) = \frac{24}{125}.$$

   Si la barre était placée à 2m dès le premier essai, avec trois essais pour la franchir, alors la probabilité qu'il se qualifie serait égale à

$$P(Z \leq 3) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125} = 48.8\%.$$

   Il aurait donc beaucoup plus de chances de se qualifier.
7. `runif(3,1.6,2.1)`

8. Une première solution avec des "if" "else" :

```
Qualifie = function()
{
  X = runif(3,1.6,2.1) # on tire au sort les trois sauts
  if(X[1]>=1.9) # première barre franchie au premier essai (Y=1)
    if(X[2]>=2.0) # deuxième barre franchie au premier essai (Z=1)
      qualif = TRUE
    else
      if(X[3]>=2.0) # deuxième barre franchie au deuxième essai (Z=2)
        qualif = TRUE
      else
        qualif = FALSE
  else
    if(X[2]>=1.9) # première barre franchie au deuxième essai (Y=2)
      if(X[3]>=2.0) # deuxième barre franchie au premier essai (Z=1)
        qualif = TRUE
      else
        qualif = FALSE
    else
      qualif = FALSE
  qualif # on renvoie la variable qualif (qui vaut TRUE ou FALSE)
}
```

Une version beaucoup plus compacte en utilisant les opérateurs logiques :

```
Qualifie = function()
{
  X = runif(3,1.6,2.1)
  qualif = (X[1]>=1.9) & (X[2]>=2.0 | X[3]>=2.0) | (X[2]>=1.9) & (X[3]>=2.0)
}
```

Autre possibilité : on tire au sort les variables géométriques Y et Z et on regarde si $Y + Z \leq 3$:

```
Qualifie = function()
{
  Y = rgeom(1,2/5)+1
  # on doit rajouter 1 car la loi géométrique en R est comptée à partir de 0
  Z = rgeom(1,1/5)+1
  Y+Z <= 3
}
```

9.
```
FrequenceQualifie = function(n)
{
  N = 0 # N comptera le nombre de qualifications sur les n épreuves
  for(k in 1:n)
    N = N + Qualifie() # Qualifie() vaut TRUE (=1) ou false (=0)
  N/n
}
```