Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Probabilités et statistiques pour l'informatique - Licence MIA 2e année
Examen du 6 janvier 2016 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 On considère deux urnes A et B. L'urne A contient au départ trois boules rouges et deux boules vertes, tandis que B ne contient rien. On tire successivement des boules au hasard dans l'urne A que l'on place à chaque fois dans B, jusqu'à ce qu'on ait tiré une boule verte (cette boule verte est aussi placée dans l'urne B).

1. Soit X le nombre total de boules dans l'urne B après l'expérience. Quelle est la loi de X ?

A la fin de l'expérience, on tire au sort une boule de l'urne B, et on cherche à connaître la probabilité que ce soit une boule verte. Soit donc E l'événement : "la boule tirée de B est verte".

2. Que vaut $P(E|X = 1)$? Calculer de même $P(E|X = x)$ pour toutes les valeurs x possibles de X.
3. En déduire $P(E)$.

Exercice 2 Soient $\alpha > 0, c \in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} c\, t^2 \text{ si } 0 \leq t \leq \alpha, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c en fonction de α pour que f corresponde à une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Calculer $E(X)$ en fonction de α.

On suppose que α est un paramètre inconnu que l'on cherche à estimer à partir d'une suite de variables indépendantes X_n, $n \geq 1$, toutes de même loi que X.

3. Ecrire la loi des grands nombres pour les variables X_n.
4. En déduire un estimateur du paramètre α.
5. Cet estimateur est-il sans biais ?

Exercice 3 *remarque : les questions 7, 8 et 9 concernent la partie TP du cours (langage R). Il n'est pas nécessaire de savoir faire les questions précédentes pour y répondre.*

Un athlète s'entraîne au saut en hauteur : la barre est d'abord fixée à 1m 90, et l'athlète effectue des sauts successifs jusqu'à ce qu'il parvienne à la franchir. Puis la barre est placée à 2m pour les essais suivants, et l'athlète effectue à nouveau des sauts jusqu'à parvenir à franchir la nouvelle hauteur.

On note X_n, $n \geq 1$, la hauteur du saut de l'athlète à chaque essai, et on suppose que les X_n sont des variables indépendantes de même loi uniforme sur l'intervalle $[1.60, 2.10]$, exprimé en mètres. Une barre est franchie lorsque la hauteur du saut est supérieure ou égale à la hauteur de la barre.

1. Quelle est la probabilité que la barre $1m90$ soit franchie lors du premier essai ?
2. On note Y le nombre d'essais nécessaires pour franchir la première barre. Quelle est la loi de Y ?
3. On note Z le nombre d'essais nécessaires pour franchir la deuxième barre (comptés à partir du moment où la première barre a déjà été franchie). Quelle est la loi de Z ?
4. Calculer $P(Z \leq k)$ pour tout $k \geq 1$.
5. Calculer $P(Y + Z \leq 3)$. (*indication : conditionner par rapport à* $Y = 1$ *et* $Y = 2$.)

A présent l'athlète passe une épreuve officielle. Il dispose en tout de trois essais pour franchir les deux barres. Par exemple s'il franchit 1m 90 à son deuxième essai, il ne lui reste alors qu'un essai pour franchir 2m. L'athlète sera qualifié s'il parvient à franchir la barre des 2m.

6. Quelle est la probabilité que l'athlète soit qualifié ? Est-ce qu'il aurait plus de chance de se qualifier si la barre était placée à 2m dès le premier essai, avec trois essais pour la franchir ?
7. Donner la commande R permettant de simuler trois variables aléatoires de loi uniforme sur $[1.60, 2.10]$.
8. Ecrire une fonction `Qualifie = function()` sans paramètre qui simule l'épreuve de saut en hauteur et renvoie `TRUE` ou `FALSE` suivant que l'athlète a réussi ou non à se qualifier.
9. Ecrire une fonction `FrequenceQualifie = function(n)` permettant de simuler n épreuves (chaque épreuve correspondant à trois sauts comme expliqué auparavant) et renvoyant la fréquence de qualification de l'athlète, c'est-à-dire nombre de fois où il se qualifie divisé par le nombre d'épreuves.