Probabilités et Statistique pour l'Informatique - Licence MIA 2e année
Examen partiel du 10/11/2014 - Correction

Exercice 1

1. (a) Il s'agit d'un tirage avec remise, donc à chaque tirage le sac contient toujours r boules rouges et n boules noires, et la probabilité de tirer une boule rouge est donc de $p = \frac{r}{r+n}$. Les tirages successifs correspondent donc à des expériences indépendantes de probabilité de succès p, et X correspond au rang du premier succès. X suit donc la loi géométrique de paramètre $p = \frac{r}{r+n}$.

   (b) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{r+n}{r}$.

2. (a) Les seules valeurs possibles pour Y sont 1, 2, ou 3. En effet il n'y a que 2 boules noires, donc au pire la première boule rouge sera tirée au troisième tour.
   Pour $1 \leq i \leq 3$ on note

$$R_i = \text{"On tire une boule rouge au } i^e \text{ tirage"},$$

$$N_i = \text{"On tire une boule noire au } i^e \text{ tirage"}.$$

   On a alors

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(R_1) = \frac{r}{r+n} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \\ P(Y=2) &= P(R_2 \cap N_1) = P(R_2|N_1)P(N_1) = \frac{8}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{8}{45}, \end{aligned}$$

   ($P(R_2|N_1) = \frac{8}{9}$ car si on a tiré une boule noire en premier, alors il reste 8 boules rouges et 1 boule noire pour le deuxième tirage.)

$$P(Y=3) = 1 - P(Y=2) - P(Y=1) = 1 - \frac{8}{45} - \frac{4}{5} = \frac{45-8-36}{45} = \frac{1}{45}.$$

   (b)

$$E(Y) = 1 \times \frac{4}{5} + 2 \times \frac{8}{45} + 3 \times \frac{1}{45} = \frac{36+16+3}{45} = \frac{55}{45} = \frac{11}{9}.$$

Exercice 2

1. X compte le nombre de succès (obtention du 4) lors de la répétition de 10 expériences aléatoires indépendantes. La probabilité de chaque succès est 1/6. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 1/6$. On a $E(X) = np = 5/3$ et $V(X) = np(1-p) = 25/18$.

2. (a) On a $E(Y_1 + Y_2) = E(Y_1) + E(Y_2)$. Y_1 et Y_2 sont les résultats des lancers de dés ; ils suivent donc la même loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$:

$$P(Y_1 = 1) = P(Y_1 = 2) = \cdots = P(Y_1 = 6) = \frac{1}{6},$$

   et de même pour Y_2. L'espérance de cette loi est :

$$\begin{aligned} E(Y_1) = E(Y_2) &= 1 \times P(Y_1 = 1) + 2 \times P(Y_1 = 2) + \cdots + 6 \times P(Y_1 = 6) \\ &= \frac{1+2+\cdots+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5. \end{aligned}$$

   Donc finalement,

$$E(Y_1 + Y_2) = 3.5 + 3.5 = 7.$$

(b) Notons $Y = Y_1 + Y_2$. Les valeurs possibles de Y sont $2, 3, \ldots, 12$. On a

$$P(Y = 2) = P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]) = P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

car Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

$$\begin{aligned} P(Y = 3) &= P(([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 2]) \cup ([Y_1 = 2] \cap [Y_1 = 2])) \\ &= P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 2]) + P([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 1]) \text{ (événements disjoints)} \\ &= P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 2) + P(Y_1 = 2)P(Y_2 = 1) \text{ } (Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ indépendantes}), \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}. \end{aligned}$$

Plus généralement, on aura $P(Y = k) = \frac{N_k}{36}$ où N_k correspond au nombre de combinaisons de valeurs de Y_1 et Y_2 dont la somme fait k. On obtient finalement la loi suivante :

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y = y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exercice 3

1. On doit avoir $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Or,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} c(1 - x^2)dx = c\left(\int_{-1}^{1} dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx\right) \\ &= c\left(2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\right) = c\left(2 - \left(\frac{1^3 - (-1)^3}{3}\right)\right) \\ &= c\left(2 - \left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}c. \end{aligned}$$

On a donc $\frac{4}{3}c = 1$ et ainsi $c = \frac{3}{4}$.

2.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} xc(1 - x^2)dx = c\left(\int_{-1}^{1} xdx - \int_{-1}^{1} x^3 dx\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{1^2 - (-1)^2}{2}\right) - \left(\frac{1^4 - (-1)^4}{4}\right)\right) \\ &= \frac{3}{4}(0 - 0) = 0. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 c(1 - x^2)dx = c\left(\int_{-1}^{1} x^2 dx - \int_{-1}^{1} x^4 dx\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{1^3 - (-1)^3}{3}\right) - \left(\frac{1^5 - (-1)^5}{5}\right)\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{15} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

4. Une variable Y de loi uniforme sur $[-1, 1]$ a pour densité

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \in [-1, 1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

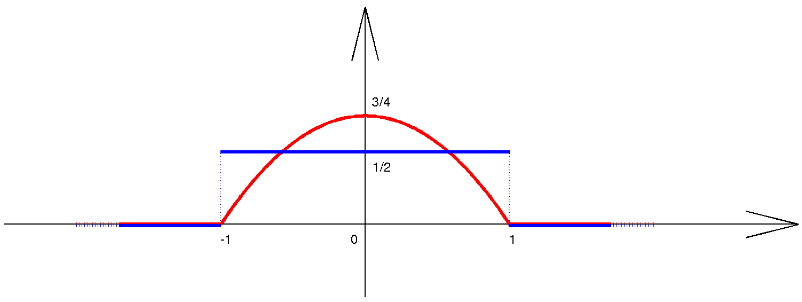
Son espérance vaut

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} xg(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1^2 - (-1)^2}{2}\right) = 0,$$

et sa variance

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1^3 - (-1)^3}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

On a donc $E(X) = E(Y) = 0$ et $V(X) = \frac{1}{5} < \frac{1}{3} = V(Y)$. Les espérances pour ces deux lois sont égales à 0 car les denistés sont des fonctions symétriques. Le fait que la loi uniforme ait une plus grande variance peut se voir sur un graphique comparant les deux densités :



On voit que $f(x)$ et supérieur à $g(x)$ lorsque x est proche de 0, et inversement $f(x) \leq g(x)$ pour x proche de 1 ou -1. Par conséquent Y a plus de chance d'être éloignée de son espérance 0 que X, ce qui implique que son écart-type est plus grand.

Exercice 4

Pour une inspection un jour donné, on note les événements suivants :

$$A = \text{"Le couteau est issu de la machine A"},$$

$$B = \text{"Le couteau est issu de la machine B"},$$

$$F = \text{"Le couteau est défectueux"}.$$

On a $P(F|A) = 0.06$, $P(F|B) = 0.16$, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 1 - P(A) = 0.4$.

1.

$$P(F) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) = 0.06 \times 0.6 + 0.16 \times 0.4 = 0.036 + 0.064 = 0.1.$$

2.
$$P(A|F) = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \frac{0.06 \times 0.6}{0.1} = \frac{0.036}{0.1} = 0.36.$$

3. On a besoin cette fois de considérer plusieurs inspections consécutives. On va donc noter, pour $i = 1, 2, 3, \dots$:

$$F_i = \text{"Le couteau prélevé le jour } i \text{ est défectueux"}.$$

Les événements F_i sont indépendants et ont même probabilité $P(F_i) = 0.1$.

(a) La production s'arrête le deuxième jour si et seulement si le couteau prélevé le premier jour et le couteau prélevé le deuxième jour sont défectueux. Donc

$$P(C) = P(F_2 \cap F_1) = P(F_2)P(F_1) = 0.1 \times 0.1 = 0.01.$$

(b) La production s'arrête le troisième jour si et seulement si les couteaux prélevés les jours 2 et 3 sont défectueux et celui du premier jour ne l'est pas. Ainsi

$$P(D) = P(F_3 \cap F_2 \cap F_1^c) = P(F_3)P(F_2)P(F_1^c) = 0.1 \times 0.1 \times 0.9 = 0.009.$$

(c) On passe au complémentaire : la production dure au plus 4 jours si et seulement si elle s'arrête le deuxième, le troisième ou le quatrième jour, ce qui s'écrit

$$P(E^c) = P(C \cup D \cup G),$$

où G est l'événement "la production s'arrête le quatrième jour". Les trois événements C, D, G sont incompatibles, donc

$$P(E^c) = P(C) + P(D) + P(G) = 0.01 + 0.009 + P(G).$$

Il reste à calculer $P(G)$: pour que la production s'arrête le 4e jour il faut et il suffit que les couteaux prélevés les jours 3 et 4 aient été défectueux et pas celui du 2e jour (car sinon la production se serait arrêtée le 3e jour). On a donc :

$$P(G) = P(F_4 \cap F_3 \cap F_2^c) = P(F_4)P(F_3)P(F_2^c) = 0.1 \times 0.1 \times 0.9 = 0.009.$$

Finalement,

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - 0.01 - 0.009 - 0.009 = 0.972.$$