Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Probabilités et statistiques pour l'informatique - Licence MIA 2e année
Examen du 6 janvier 2015 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 *(8 points)* On cherche à estimer la répartition en taille des hommes d'un pays. On suppose que la taille X en centimètres d'un homme pris au hasard dans la population est modélisée par une variable aléatoire d'espérance $\mu = E(X)$ et variance $\sigma^2 = V(X)$ inconnues. On choisit au hasard $n = 100$ hommes dans la population dont on mesure la taille X_i. Les X_i sont des variables indépendantes et de même loi que X. Le résultat des mesures est donné par le tableau suivant :

Taille x en cm	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173
Nb de X_i égaux à x	1	0	1	0	1	1	3	1	1	6	1	2	10	2

174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191
3	8	3	5	7	7	5	6	6	5	4	1	2	1	1	2	1	3

A partir du tableau, on a calculé les valeurs numériques suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1.7712 \times 10^4, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \simeq 3.1416 \times 10^6.$$

Pour la suite on donne également les résultats suivants : $1.7712^2 \simeq 3.1371, \quad 6.71^2 \simeq 45.$

1. Énoncer la loi des grands nombres pour les variables X_i et en déduire un estimateur de l'espérance μ de X. Montrer que cet estimateur est sans biais. Donner la valeur numérique de cette estimation de la taille moyenne.
2. Donner un estimateur convergeant de la variance σ^2 et donner sa valeur numérique. En déduire une estimation de l'écart-type de X en cm.
3. On suppose à présent que l'écart-type σ est connu et égal à 7 cm. Énoncer le théorème central limite pour les variables X_i et en déduire un intervalle de confiance au niveau 95% pour μ. On rappelle que si une variable Z suit la loi normale centrée réduite, alors $P(|Z| \leq 1.96) \simeq 0.95$.
4. Peut-on en conclure qu'on a estimé la taille moyenne des hommes du pays avec une erreur inférieure à 1 cm ? Sinon, que devrait-on faire pour que ce soit le cas ?

Exercice 2 *Les trois parties de l'exercice sont très largement indépendantes.*

Partie 1 *(4 points)* Soit Z une variable aléatoire admettant pour densité la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{25} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 5, \\ -\frac{x}{25} + \frac{2}{5} \quad \text{si } 5 \leq x \leq 10, \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f.
2. Vérifier que f correspond bien à une densité de probabilité.

3. Quelle est l'espérance de Z ?
4. Rappeler la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire, et calculer la fonction de répartition de Z.

Un étudiant cherche à se rendre du rez-de-chaussée au cinquième étage du bâtiment en prenant l'ascenseur. Lorsqu'il arrive, il y a une chance sur deux qu'au moins six personnes attendent déjà l'ascenseur, auquel cas il ne pourra rentrer qu'au deuxième tour. Le temps d'attente de l'ascenseur au premier tour correspond à un temps X aléatoire compris entre 0 et 5 minutes, représenté par une variable X de loi uniforme sur $[0, 5]$. Le temps d'attente au deuxième tour est modélisé par une variable Y de même loi que X et indépendante. On note T le temps d'attente de l'étudiant.

Partie 2 (4 points)

5. Écrire une fonction R : `Temps_Attente = function()` sans paramètre qui simule l'expérience aléatoire et renvoie le temps d'attente T de l'étudiant.
6. Écrire une suite de commandes R utilisant la fonction précédente qui effectue 100 simulation de l'expérience aléatoire et calcule le nombre de fois où l'attente était supérieure à 6 minutes.

Partie 3 (4 points)

7. Pour tout $t > 0$, exprimer $P(T \leq t)$ (probabilité que l'étudiant attende moins de t minutes) en fonction de $P(X \leq t)$ et de $P(X + Y \leq t)$.
8. On admet que la variable $Z = X + Y$ correspond à la variable Z de la partie 1. Déduire de la question précédente l'expression de $F_T(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
9. Déduire de la question précédente l'expression de la densité f_T de la variable T, puis tracer sa représentation graphique.