Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen de deuxième session - 16 juin 2014 - Durée : 2 heures

Exercice 1 Dans un grand lycée il y a 10 classes de Terminale. Trois de ces classes ont 25 élèves, cinq ont 30 élèves et deux classes ont 35 élèves. On interroge un lycéen au hasard dans la cour et on lui demande combien il y a d'élèves dans sa classe. On note X sa réponse. Déterminer la loi de X, puis calculer son espérance $E(X)$. Que vaut le nombre moyen d'élèves par classe ? Pourquoi n'est-il pas égal à $E(X)$?

Exercice 2 On dispose d'un dé à 6 faces et d'une pièce de monnaie. On lance le dé en premier, puis la pièce de monnaie plusieurs fois de suite, le nombre de lancers de la pièce correspondant au résultat du dé (par exemple si le dé est tombé sur 4 on lance 4 fois la pièce de monnaie). On suppose que l'on gagne le jeu si la pièce est tombé au moins deux fois sur le côté face.

On note D le résultat du dé, X le nombre de fois où la pièce est tombée sur le côté face, et G l'événement "le jeu est gagné".

1. Donner une suite de commande R qui permette de simuler le résultat du dé et les lancers puis calcule le nombre de fois où la pièce est tombée sur face.
2. Que vaut $P(X = 3|D = 4)$? Calculer plus généralement $P(X = k|D = n)$ pour tous k et n possibles. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant l'événement $[D = n]$?
3. Calculer $P(G)$ ainsi que $E(X)$.
4. Calculer la probabilité que le dé soit tombé sur 2 sachant que l'on a gagné le jeu.

Exercice 3 Soit une variable X de loi de probabilité donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(X = n) = \frac{c}{n!},$$

où $c \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est le support de la loi de X ? Est-il fini ou infini ? La loi de X est-elle discrète ?
2. Déterminer la valeur de c. Comment s'appelle la loi de X ?
3. Calculer $P(X \geq 3)$ et $P(4 \leq X \leq 5)$.
4. Calculer l'espérance de X.

Exercice 4 On interroge 1000 personnes choisies au hasard dans la population sur leur opinion (favorable ou défavorable) envers un homme politique. On note X_i la réponse de la i^e personne, avec la convention : $X_i = 1$ si la personne a répondu "favorable", $X_i = 0$ sinon. On suppose que les variables X_i sont toutes indépendantes et que chaque personne répond "favorable" avec probabilité p. p représente la proportion d'opinions favorables dans la population, que le sondage cherche à estimer.

1. Quelle est la loi de chaque X_i ? On note N le nombre total de réponses favorables. Exprimer N en fonction des X_i. Quelle est la loi de N ? Quelle est son espérance et sa variance ? Quelle est la meilleure estimation de p que l'on puisse donner à partir de N ?
2. Enoncer le théorème central limite pour les variables X_i et en déduire que la loi de N peut être approchée par une loi normale. Rappeler l'expression de la densité de probabilité de cette loi normale.
3. Déterminer un intervalle de confiance à 95% pour l'estimation de p. On pourra utiliser le résultat suivant : si Z suit une loi normale centrée réduite, alors $P(|Z| \leq 1.96) \simeq 0.95$.