Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Correction de l'examen partiel du 28/10/2013

Exercice 1

1. Soit M l'événement "la personne est atteinte de la maladie", et T l'événement "le test est positif". Les hypothèses de l'énoncé s'écrivent
$$P(M) = 0.001, \quad P(T|M) = 0.95, \quad P(T^c|M^c) = 0.95.$$
La probabilité demandée est $P(M|T)$. D'après la règle de Bayes on a
$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|M^c)P(M^c)}.$$
On a $P(T|M^c) = 1 - P(T^c|M^c) = 0.05$ et $P(M^c) = 1 - P(M) = 0.999$. Donc
$$P(M|T) = \frac{0.95 \times 0.001}{0.95 \times 0.001 + 0.05 \times 0.999} = \frac{95}{95 + 5 \times 999} = \frac{95}{5090} = \frac{19}{1018} \simeq 0.019 = 1.9\%.$$
Ainsi il y a moins de 2% de chances que la personne soit réellement malade si son test est positif. Le test est donc loin d'être efficace.
2. On reprend la formule de Bayes précédente avec cette fois $P(T|M) = P(T^c|M^c) = \alpha$ (inconnu) et $P(M|T) = 0.95$. On a alors
$$0.95 = \frac{\alpha \times 0.001}{\alpha \times 0.001 + (1-\alpha) \times 0.999},$$
d'où
$$0.95 \times (\alpha \times 0.001 + (1-\alpha) \times 0.999) = \alpha \times 0.001,$$
d'où l'on tire
$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-0.95 \times 0.999}{0.95 \times (0.001 - 0.999) - 0.001} = \frac{0.95 \times 0.999}{0.95 \times 0.998 + 0.001} = \frac{95 \times 999}{95 \times 998 + 100} \\ &= \frac{19 \times 999}{19 \times 998 + 20} = \frac{18981}{18982} = 1 - \frac{1}{18982} \\ &\simeq 1 - \frac{1}{2 \times 10^4} \simeq 1 - 0.5 \times 10^-4 = 1 - 0.00005 = 0.99995. \end{aligned}$$
Ainsi le taux de réussite du test devrait être de 99.995%.

Exercice 2

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{2}$ car X compte le nombre de succès ("tomber sur pile") lors de 6 essais indépendants, chacun avec probabilité de succès $\frac{1}{2}$. On a pour tout k, $0 \leq k \leq 6$,
$$P(X = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-k} = \binom{6}{k} \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} \binom{6}{k}$$

2. – Les valeurs possibles pour G sont -200, 0 et 10 : $\mathrm{Supp}(X) = \{-200, 0, 10\}$. On a

$$\begin{aligned}
P(G=-200) &= P(X=0) = \frac{1}{64}\binom{6}{0} = \frac{1}{64}, \\
P(G=0) &= P(1 \leq X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\
&= \frac{1}{64}\left(\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3}\right) = \frac{6+15+20}{64} = \frac{41}{64}, \\
P(G=10) &= 1 - P(G=-200) - P(G=0) = 1 - \frac{1}{64} - \frac{41}{64} = \frac{22}{64} = \frac{11}{32}.
\end{aligned}$$

– On a

$$\begin{aligned}
E(G) &= (-200) \times P(G=-200) + 0 \times P(G=0) + 10 \times P(G=10) \\
&= -200 \times \frac{1}{64} + 10 \times \frac{22}{64} = \frac{-200+220}{64} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

L'espérance est positive donc le jeu est favorable.

– On a

$$V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = E(G^2) - \left(\frac{5}{16}\right)^2,$$

avec

$$\begin{aligned}
E(G^2) &= (-200)^2 \times P(G=-200) + 0^2 \times P(G=0) + 10^2 \times P(G=10) \\
&= 40000 \times \frac{1}{64} + 100 \times \frac{22}{64} = \frac{40000+2200}{64} = \frac{42200}{64}.
\end{aligned}$$

D'où

$$V(G) = \frac{42200}{64} - \frac{25}{256} = \frac{168825}{256}.$$

Enfin l'écart-type vaut

$$\sigma(G) = \sqrt{V(G)} = \sqrt{\frac{168825}{256}}.$$

Exercice 3

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{2}{3}$ car X compte le nombre de succès ("A gagne la partie") lors de la répétition de 5 expériences indépendantes, avec probabilité de succès $\frac{2}{3}$ pour chacune. On a donc pour tout k, $0 \leq k \leq 5$,

$$P(X=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-k} = \binom{5}{k}\frac{2^k}{3^5}.$$

2. A gagne le jeu lorsque il a remporté au moins 3 parties.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\
&= \frac{1}{3^5}\left(\binom{5}{3}2^3 + \binom{5}{4}2^4 + \binom{5}{5}2^5\right) \\
&= \frac{1}{3^5}\left(10 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + 2^5\right) = \frac{80+80+32}{243} = \frac{192}{243} \simeq 0.79.
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. On doit faire au minimum 2 lancers pour observer la répétition d'un numéro, et on ne peut avoir plus de 7 lancers, puisque si le jeu ne s'est pas terminé avant le septième lancer, c'est que tous les numéros précédents étaient distincts, et donc que tous les nombres de 1 à 6 sont déjà apparus. Ainsi

$$\mathrm{Supp}(X) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

2. Dans l'hypothèse où le jeu n'est toujours pas terminé avant le k^e coup - c'est-à-dire conditionnellement à $[X > k-1]$ - le jeu s'arrête au k^e coup si on tombe sur un des $k-1$ numéros précédents, qui sont forcément distincts. On a donc

$$P(X = k | X > k-1) = \frac{k-1}{6}.$$

Or

$$P(X = k | X > k-1) = \frac{P([X = k] \cap [X > k-1])}{P(X > k-1)} = \frac{P(X = k)}{P(X > k-1)}$$

puisque $[X = k] \subset [X > k]$. Donc

$$P(X = k) = \frac{k-1}{6} P(X > k-1). \qquad (*)$$

On peut en déduire une relation permettant entre $P(X = k)$ et $P(X = k-1)$, ce qui permettra de calculer $P(X = k)$ de proche en proche. On a

$$\begin{aligned}
P(X > k-1) &= P(X > k-2) - P(X = k-1), \\
&= \frac{6}{k-2} P(X = k-1) - P(X = k-1) \quad \text{(en écrivant } (*) \text{ au rang } k-1\text{)} \\
&= \left(\frac{6}{k-2} - 1\right) P(X = k-1).
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$P(X = k) = \frac{k-1}{6}\left(\frac{6}{k-2} - 1\right) P(X = k-1) = \left(\frac{k-1}{k-2} - \frac{k-1}{6}\right) P(X = k-1).$$

On peut calculer alors la loi en partant de $k = 2$:

$$\begin{aligned}
P(X = 2) &= \frac{1}{6} \quad \text{(une chance sur 6 de tomber sur le même nombre au } 2^e \text{ coup)} \\
P(X = 3) &= \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{6}\right)\frac{1}{6} = \frac{5}{18}, \\
P(X = 4) &= = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{6}\right)\frac{5}{18} = \frac{5}{18}, \\
P(X = 5) &= \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{6}\right)\frac{5}{18} = \frac{5}{27} \\
P(X = 6) &= \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{6}\right)\frac{5}{54} = \frac{25}{324} \\
P(X = 7) &= \left(\frac{6}{5} - \frac{6}{6}\right)\frac{25}{324} = \frac{5}{324}.
\end{aligned}$$

3. On doit toujours faire au moins deux lancers pour observer une répétition. Par contre cette fois il n'y a pas de valeur maximum à X, car la répétition de deux nombres consécutifs peut apparaître après un nombre arbitraire de lancers. Donc ici

$$\mathrm{Supp}(X) = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Lors du k^e lancer, le jeu s'arrête si on tombe sur le nombre tombé précédemment, ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{6}$. Donc on a cette fois

$$P(X = k | X > k - 1) = \frac{1}{6}.$$

Donc ici on obtient

$$P(X = k) = \frac{1}{6} P(X > k - 1). \quad (**)$$

Comme précédemment on écrit cette relation à l'ordre $k-1$ pour exprimer $P(X > k-1)$ en fonction de $P(X = k-1)$:

$$\begin{aligned} P(X = k-1) &= \frac{1}{6} P(X > k-2) = \frac{1}{6} \left(P(X > k-1) + P(X = k-1) \right) \\ &= \frac{1}{6} P(X > k-1) + \frac{1}{6} P(X = k-1), \end{aligned}$$

donc

$$P(X > k-1) = 6 \left(1 - \frac{1}{6} \right) P(X = k-1) = 5P(X = k-1).$$

On en déduit la nouvelle relation entre $P(X = k)$ et $P(X = k-1)$:

$$P(X = k) = \frac{5}{6} P(X = k-1).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \left(\frac{5}{6} \right)^{k-2} P(X = 2) \\ P(X = k) &= \left(\frac{5}{6} \right)^{k-2} \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On remarque qu'on retrouve en fait la formule d'une loi géométrique, à ceci près que les rangs sont décalés d'une unité. Plus précisément $X - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.