Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen du 7 janvier 2014 - Durée : 2 heures

Exercice 1 On considère deux urnes A et B. L'urne A contient deux boules rouges et une boule verte et l'urne B ne contient qu'une boule rouge. On suppose que l'on tire au hasard une boule de l'urne A pour la placer dans B, puis que l'on tire au hasard une boule de l'urne B pour la placer dans A. On note les événements suivants :

- R_1 ="on tire une boule rouge au premier tirage",
- V_1 ="on tire une boule verte au premier tirage",
- R_2 ="on tire une boule rouge au deuxième tirage",
- V_2 ="on tire une boule verte au deuxième tirage".

Pour toutes les questions suivantes on exprimera d'abord les probabilités demandées à l'aide de ces événements avant de faire le calcul.

1. Quelle est la probabilité qu'après les deux tirages l'urne A contienne trois boules rouges et l'urne B une boule verte ?
2. Quelle est la probabilité qu'après les deux tirages la configuration des urnes soit identique à la configuration initiale (deux boules rouges et une verte en A, une boule rouge en B) ?
3. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit verte sachant qu'on est revenu à la configuration initiale après les deux tirages ?
4. Écrire une suite de commande R permettant de simuler les deux tirages consécutifs dans les urnes A et B.

Exercice 2 On lance et relance un dé à 6 faces indéfiniment. On note X le numéro du lancer du premier 5 obtenu et Y le numéro du lancer du premier 6 obtenu.

1. Quelles sont les lois des variables X et Y ?
2. Que vaut $P(X = 1, Y = 1)$? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Pour tout $k \geq 1$ on note les événements suivants :
   - C_k ="le lancer numéro k est un 5",
   - S_k ="le lancer numéro k est un 6",
   - A_k ="le lancer numéro k n'est ni un 5 ni un 6".

   Exprimer l'événement $[X = 2] \cap [Y = 4]$ en fonction des événements C_k, S_k, A_k pour $k \leq 4$, et en déduire $P(X = 2, Y = 4)$.
4. Faire de même avec l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ pour i et j quelconques et en déduire la loi jointe du couple (X, Y).

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit une densité de probabilité. Tracer sur un graphique la fonction f.

On considère à présent une variable aléatoire X admettant pour densité de probabilité la fonction f.

2. Déterminer les valeurs de $P(X \leq 0)$ et $P(X \geq \frac{1}{2})$.
3. Rappeler la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire, puis calculer la fonction de répartition de X et la représenter sur un graphique.

Exercice 4 Une personne prend le bus tous les matins pour se rendre à son travail. On considère que le temps T en minutes qu'elle passe à attendre le bus à la station suit une loi exponentielle de paramètre $a = \frac{1}{5}$.

1. Écrire l'expression de la densité de probabilité de la variable T et donner la valeur de $E(T)$.
2. Donner la commande R permettant d'obtenir un tirage aléatoire suivant la loi de T.
3. Quelle est la probabilité que la personne attende plus de 10 minutes le bus ?
4. On suppose à présent que le paramètre a est inconnu, et on cherche à l'estimer à partir des temps d'attente observés sur plusieurs jours consécutifs T_1, T_2, $T_3, \ldots$. On suppose que les T_k sont des variables indépendantes et de même loi que T. Énoncer la loi des grands nombres pour les variables T_k, $k \geq 1$, et en déduire un estimateur du paramètre a.