Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen de deuxième session - 12/06/2013 - Correction

Exercice 1

1. – On doit montrer que $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$. A^c et A forment une partition de Ω, donc on peut écrire
$$P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B).$$
A et B étant indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ce qui donne
$$P(B) = P(A^c \cap B) + P(A)P(B),$$
et donc
$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(A^c)P(B).$$
Ainsi A^c et B sont indépendants.
   – On vient de montrer que pour tous événements A, B, A, B indépendants implique A^c, B indépendants. Il suffit donc d'appliquer ce résultat en remplaçant A par B et B par A^c : puisque B et A^c sont indépendants, on en déduit que B^c et A^c sont indépendants.
2. $A \cap B$ et $A^c \cap B^c$ sont des événements disjoints. En effet, $(A \cap B) \cap (A^c \cap B^c) = A \cap B \cap A^c \cap B^c = (A \cap A^c) \cap B \cap B^c = \emptyset$ puisque $A \cap A^c = \emptyset$. Par conséquent on peut écrire
$$P\left[(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\right] = P(A \cap B) + P(A^c \cap B^c) = P(A)P(B) + P(A^c)P(B^c),$$
d'après les résultats de la première question. Finalement,
$$\begin{aligned} P\left[(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\right] &= P(A)P(B) + (1 - P(A))(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 + 2P(A)P(B) - P(A) - P(B). \end{aligned}$$
3. $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$.
4. •
$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{2k-1}, \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)^2)^k \\ &= \frac{p}{1-p} \times \frac{1}{1-(1-p)^2} \\ &= \frac{1}{(1-p)(2-p)} \end{aligned}$$
   • Y et X ont même loi, par conséquent, $P(B) = P(A) = \frac{1}{(1-p)(2-p)}$.

- $X+Y$ est pair si X et Y sont pairs ou si X et Y sont impairs. Donc,

$$P(C) = P\left[(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c)\right].$$

Puisque X et Y sont indépendants, A et B sont indépendants, et donc d'après la deuxième question on a

$$\begin{aligned}
P(C) &= P\left[(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c)\right] \\
&= 1+2P(A)P(B)-P(A)-P(B) \\
&= 1+2\left(\frac{1}{(1-p)(2-p)}\right)^2 - 2\frac{1}{(1-p)(2-p)} \\
&= \frac{(1-p)^2(2-p)^2+2-2(1-p)(2-p)}{(1-p)^2(2-p)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 2 Notons A l'événement "il franchit la barre à la première tentative" et B l'événement "il franchit la barre à la deuxième tentative". Les hypothèses s'écrivent

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{2}{3}, \\
P(B|A^c) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

La probabilité demandée est celle de l'événement S : "il franchit la barre à l'une des deux tentatives", qui se décompose en "il franchit la barre à la première tentative" ou "il échoue à la première tentative et réussit à la deuxième". On a donc

$$\begin{aligned}
P(S) &= P\left[A\cup(A^c\cap B)\right] \\
&= P(A)+P(A^c\cap B) \quad \text{(événements disjoints)} \\
&= P(A)+P(B|A^c)P(A^c) \\
P(S) &= \frac{2}{3}+\frac{1}{2}(1-\frac{2}{3}) = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. X compte le nombre de 6 obtenus lors du lancer de 10 dés. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{6}$. On a

$$P(X=k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} \qquad \text{pour } 0\le k\le 10.$$

2. On se place dans la situation où $X=h$, c'est-à-dire que h dés sont tombés sur 6. Dans cette situation, on relance les $10-h$ autres dés, et donc Y compte le nombre de 6 obtenus lors du lancer de $10-h$ dés. Par conséquent, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=h]$ est la loi binomiale de paramètres $10-h$ et $\frac{1}{6}$. On a

$$P(Y=k|X=h) = \binom{10-h}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{10-h-k} \qquad \text{pour } 0\le k\le 10-h.$$

3. On a $Z = X + Y$, et le support de Z est $\{0, \ldots, 10\}$. On a, pour $0 \leq k \leq n = 10$,

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= P(X + Y = k) = \sum_{h=0}^{k} P(X + Y = k | X = h) P(X = h) \\
&= \sum_{h=0}^{k} P(Y = k - h | X = h) P(X = h) \\
&= \sum_{h=0}^{k} \binom{n-h}{k-h} p^{k-h} (1-p)^{n-k} \times \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} \\
&= \sum_{h=0}^{k} \frac{(n-h)!}{(k-h)!(n-k)!} \times \frac{n!}{h!(n-h)!} p^k (1-p)^{2n-k-h} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!(k-h)!} (1-p)^{-h} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (1-p)^{k-h} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} (1 + (1-p))^k \\
&= \binom{n}{k} [p(2-p)]^k [(1-p)^2]^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} [1 - (1-p)^2]^k [(1-p)^2]^{n-k}.
\end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $1 - (1-p)^2 = 1 - (5/6)^2 = 11/36$. On retrouve ce résultat directement en remarquant que l'on peut considérer que l'on relance tous les dés au deuxième coup, et pas seulement ceux qui ne sont pas tombés sur 6. Z correspond alors au nombre de dés qui sont tombés sur 6 à l'un des deux lancers au moins. Or cet événement ("obtenir 6 a l'un des deux lancers") a pour probabilité $1 - (1 - 1/6)^2$ puisqu'il s'agit du complémentaire de l'événement "n'obtenir 6 a aucun des deux lancers". Par conséquent on voit que Z doit suivre la loi binomiale de paramètres 10 et $1 - (1 - 1/6)^2 = 11/36$.

Exercice 4

1. On doit avoir $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} ce^{-\lambda|x-a|} dx = 1 &\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} ce^{-\lambda|x|} dx = 1 \text{ (changement de variable } x' = x - a) \\
&\Leftrightarrow 2c \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 1 \text{ (par symétrie de la fonction } e^{-|x|}) \\
&\Leftrightarrow c \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} = 1 \\
&\Leftrightarrow 2c \frac{0 - 1}{-\lambda} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{2c}{\lambda} = 1.
\end{aligned}$$

D'où $c = \frac{\lambda}{2}$.

2.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\lambda|x-a|} dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}} (x+a) e^{-\lambda|x|} dx \text{ (changement de variable } x' = x - a) \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\lambda|x|} dx + \frac{\lambda}{2} a \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda|x|} dx.
\end{aligned}$$

La première intégrale vaut 0 car la fonction $xe^{-\lambda|x|}$ est impaire. De plus la deuxième intégrale vaut $\frac{2}{\lambda}$ d'après le calcul précédent. On a donc $E(X) = a$.

$$\begin{aligned}
V(X) &= E[(X - E(X))^2] = E[(X-a)^2] \\
&= \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 f(x) dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 e^{-\lambda|x-a|} dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\lambda|x|} dx \text{ (changement de variable } x' = x - a) \\
&= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx \text{ (par symétrie)} \\
&= \lambda \left[x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{\infty} 2x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \\
&= 0 + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} - 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \\
&= 0 + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\
&= 0 + \frac{2}{\lambda} \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} \\
&= -\frac{2}{\lambda^2} (0 - 1) \\
V(X) &= \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

3. Les variables X_k sont indépendantes et de même loi que X ; de plus X admet une espérance et une variance finies. Par conséquent la loi des grands nombres s'applique : la suite $(\bar{X}_n)$ où $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en moyenne quadratique vers $E(X) = a$, c'est-à-dire que l'on a $\lim_{n\to\infty} E[(\bar{X}_n - a)^2] = 0$.

4. D'après ce qui précède, on peut choisir $\bar{X}_n$ comme estimateur de a. Ensuite on sait que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (X_k - \bar{X}_n)^2$ est un estimateur de $V(X) = \frac{2}{\lambda^2}$. Par conséquent, on peut choisir $\sqrt{\frac{2}{S_n}}$ comme estimateur de λ.

5.

$$
\begin{aligned}
p &= P\left(a-\frac{1}{\lambda} \leq X \leq a+\frac{1}{\lambda}\right) \\
&= \int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{a+\frac{1}{\lambda}} f(x)dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_{a-\frac{1}{\lambda}}^{a+\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda|x-a|}dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_{-\frac{1}{\lambda}}^{+\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda|x|}dx \\
&= \lambda\int_{0}^{+\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda\left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\frac{1}{\lambda}} \\
p &= 1-e^{-1}.
\end{aligned}
$$

6. Y_n correspond à une moyenne $\bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k$ si l'on pose

$$
Z_k = \begin{cases} 1 \text{ si } \left(a-\frac{1}{\lambda} \leq X_k \leq a+\frac{1}{\lambda}\right) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}
$$

Les variables Z_k sont indépendantes et de même loi, et elles admettent une espérance égale à

$$
E(Z_k) = 1 \times P\left(a-\frac{1}{\lambda} \leq X \leq a+\frac{1}{\lambda}\right) + 0 \times \left(1 - P\left(a-\frac{1}{\lambda} \leq X \leq a+\frac{1}{\lambda}\right)\right) = p.
$$

Par conséquent, d'après la loi des grands nombres appliquée aux Z_k, $Y_n = \bar{Z}_n$ converge en moyenne vers $E(Z_k) = p$.