Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Correction de l'examen du 14/01/2013 - Durée : 2 heures

Exercice 1

1. Considérons une plante choisie au hasard et notons les événements :
   A ="la plante est de la variété A",
   B ="la plante est de la variété B",
   C ="la plante est de la variété AC",
   S ="la plante survit à la nuit de gel". D'après les hypothèses on a $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$, et $P(S|A) = 0.5$, $P(S|B) = 0.6$, $P(S|C) = 0.9$. Les proportions demandées correspondent aux probabilités $P(A|S)$, $P(B|S)$ et $P(C|S)$. D'après la formule de Bayes, on a

$$P(A|S) = \frac{P(S|A)P(A)}{P(S)} = \frac{P(S|A)P(A)}{P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C)}$$

$$= \frac{0.5 \times \frac{1}{3}}{0.5 \times \frac{1}{3} + 0.6 \times \frac{1}{3} + 0.9 \times \frac{1}{3}} = \frac{0.5}{0.5 + 0.6 + 0.9} = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$P(B|S) = \frac{P(S|B)P(B)}{P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C)}$$

$$= \frac{0.6 \times \frac{1}{3}}{0.5 \times \frac{1}{3} + 0.6 \times \frac{1}{3} + 0.9 \times \frac{1}{3}} = \frac{0.6}{0.5 + 0.6 + 0.9} = \frac{3}{10} = 0.3,$$

$$P(C|S) = \frac{P(S|C)P(C)}{P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C)}$$

$$= \frac{0.9 \times \frac{1}{3}}{0.5 \times \frac{1}{3} + 0.6 \times \frac{1}{3} + 0.9 \times \frac{1}{3}} = \frac{0.9}{0.5 + 0.6 + 0.9} = \frac{9}{20} = 0.45.$$

   Ainsi parmi les plantes restantes après une nuit de gel, il y a 25% de plantes de l'espèce A, 30% de l'espèce B, et 45% de l'espèce C.

2. Considérons une plante choisie au hasard parmi les plantes restantes après la première nuit de gel. On a donc à présent $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.3$ et $P(C) = 0.45$. Si S désigne l'événement "la plante survit à la deuxième nuit de gel", les probabilités conditionnelles valent toujours $P(S|A) = 0.5$, $P(S|B) = 0.6$ et $P(S|C) = 0.9$. On applique à nouveau les formules de Bayes :

$$P(A|S) = \frac{P(S|A)P(A)}{P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C)}$$

$$= \frac{0.5 \times 0.25}{0.5 \times 0.25 + 0.6 \times 0.3 + 0.9 \times 0.45} = \frac{0.125}{0.125 + 0.18 + 0.405} = \frac{0.125}{0.71} \simeq 0.176,$$

$$P(B|S) = \frac{P(S|B)P(B)}{P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C)} = \frac{0.18}{0.71} \simeq 0.254,$$

$$P(C|S) = \frac{P(S|C)P(C)}{P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C)} = \frac{0.405}{0.71} \simeq 0.570.$$

   Les proportions après deux nuits de gel sont donc d'environ 17.6% de plantes de l'espèce A, 25.4% de l'espèce B et 57% de l'espèce C.

Exercice 2

1. La densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre a est

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} \text{ si } x \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Le i^e atome n'est pas encore désintégré au temps t si et seulement si $t < T_i$. On a donc

$$p(t) = P(T_i > t) = \int_t^{+\infty} f(x)dx = a\int_t^{+\infty} e^{-ax}dx = a\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_t^{+\infty} = -(0 - e^{-at}) = e^{-at}.$$

3. Au temps t, chaque atome a une probabilité $p(t)$ d'être encore radioactif, et $N(t)$ compte le nombre d'atomes encore radioactifs. Les variables T_i étant indépendantes, il en résulte que $N(t)$ suit la loi binomiale de paramètres n et $p(t)$.

   $N(t)/n$ est proche de $p(t)$ d'après la loi des grands nombres. En effet, notons X_i la variable égale à 1 si le i^e atome est radioactif au temps t, 0 sinon. On a alors $N(t) = \sum_{i=1}^n X_i$. Les variables X_i sont indépendantes et admettent une espérance égale à $E(X_1) = 1 \times p(t) + 0 * (1 - p(t)) = p(t)$, donc la loi des grands nombres s'applique aux variables X_i : $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n}N(t)$ converge vers $E(X_1) = p(t)$.
4. Pour tout $t > 0$ on a $E(N(t)) = np(t)$ (espérance de la loi binomiale). On doit donc résoudre l'équation

$$\begin{aligned} E(N(\tau)) = \frac{n}{2} &\Leftrightarrow np(\tau) = \frac{n}{2} \\ &\Leftrightarrow p(\tau) = e^{-a\tau} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -a\tau = \log(1/2) = -\log 2 \\ &\Leftrightarrow \tau = \frac{\log(2)}{a}. \end{aligned}$$

5. Au temps $t = 2\tau$ il reste en moyenne $E(N(2\tau))$ atomes radioactifs. On a

$$E(N(2\tau)) = ne^{-2a\tau} = ne^{-2a\frac{\log(2)}{a}} = ne^{-2\log(2)} = n \times 2^{-2} = \frac{n}{4}.$$

   La proportion d'atomes radioactifs est donc de $\frac{E(N(2\tau))}{n} = \frac{1}{4}$.

Exercice 3

1. Pour tout entier k entre 0 et n, $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
2.

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{n}{0}p^0(1-p)^n = (1-p)^n. \\ P(X = 1) &= \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}. \\ P(X > 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1} \\ &= 1 - (1-p)^{n-1}(1 - p - np) \\ &= 1 - (1-p)^{n-1}(1 - (n+1)p). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= (1-p)^n = 1-np+o(p).\\
P(X=1) &= np(1-p)^{n-1} = np(1+o(1)) = np+o(p).\\
P(X>1) &= 1-(1-np)-np+o(p) = o(p).
\end{aligned}$$

4. Les développements limités à l'ordre 1 montrent que $P(X>1)$ est négligeable devant $P(X=0)$ et $P(X=1)$, et que l'on peut don considérer que X ne prend que les deux valeurs 0 ou 1, les probabilités étant données par les développements limités : $P(X=1) = np$ et $P(X=0) = 1-np$. Il s'agit de la loi de Bernoulli de paramètre np.

5. N compte le nombre de bits altérés parmi les 7 premiers bits. Les altérations étant indépendantes et de probabilité 10^{-6} pour chaque bit, N suit la loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=10^{-6}$.

   p étant proche de 0, d'après les questions précédentes on peut approcher la loi de N par la loi de Bernoulli de paramètre $np = 7\times 10^{-6}$: $P(N=1) = 7\times 10^{-6}$ et $P(N=0) = 1-7\times 10^{-6}$. Ceci signifie que l'on néglige la possibilité que plusieurs bits soient altérés dans le message.

6. Le système signale une erreur en réception s'il y a une erreur sur les 7 premiers bits et pas d'erreur sur le bit de parité, ou s'il y a une erreur sur le bit de parité et aucune erreur sur les 7 premiers bits. Ainsi $D = (E_m\cap E_p^c)\cup(E_m^c\cap E_p)$, et

$$\begin{aligned}
P(D) &= P\left((E_m\cap E_p^c)\cup(E_m^c\cap E_p)\right)\\
&= P(E_m\cap E_p^c)+P(E_m^c\cap E_p) \quad \text{(événements incompatibles)}\\
&= P(E_m)P(E_p^c)+P(E_m^c)P(E_p) \quad \text{(car } E_m \text{ et } E_p \text{ sont indépendants)}\\
&= P(N=1)P(E_p^c)+P(N=0)P(E_p)\\
&= np(1-p)+(1-np)p\\
&= (n+1)p-2np^2\\
&= 8\times 10^{-6}-2\times 7\times 10^{-12} \simeq 8\times 10^{-6}.
\end{aligned}$$

7.

$$P(D^c|E_m) = 1-P(D|E_m) = 1-\frac{P(D\cap E_m)}{P(E_m)}.$$

   Or

$$\begin{aligned}
D\cap E_m &= \left((E_m\cap E_p^c)\cup(E_m^c\cap E_p)\right)\cap E_m\\
&= (E_m\cap E_p^c\cap E_m)\cup(E_m^c\cap E_p\cap E_m) \quad \text{(par distributivité)}\\
&= (E_m\cap E_p^c)\cup\emptyset\\
&= (E_m\cap E_p^c).
\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
P(D^c|E_m) &= 1-\frac{P(E_m\cap E_p^c)}{P(E_m)}\\
&= 1-\frac{P(E_m)P(E_p^c)}{P(E_m)} = 1-P(E_p^c) = 1-(1-p) = p = 10^{-6}.
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
P(E_m|D) &= \frac{P(D \cap E_m)}{P(D)} \\
&= \frac{P(E_m \cap E_p^c)}{P(D)} \\
&= \frac{P(E_m)P(E_p^c)}{P(D)} \simeq \frac{7.10^{-6}(1-10^{-6})}{8.10^{-6}} \simeq \frac{7}{8}.
\end{aligned}$$