Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen du 14/01/2013 - Durée : 2 heures

Exercice 1 On considère une espèce végétale pouvant se présenter sous trois variétés différentes A, B, C. La probabilité qu'une plante de la variété A survive à une nuit de gel est de 50%. Pour les variétés B et C, cette probabilité est de 60% et 90%. On suppose qu'avant la première nuit de gel, il y a 1/3 de plantes de chaque variété.

1. Parmi les plantes restant au bout d'une nuit de gel, quelles sont les proportions des variétés A, B et C ? On appliquera la formule de Bayes en définissant bien les événements.
2. Même question après deux nuits de gel (on suppose que les probabilités de survie pour chaque variété sont les mêmes lors de la deuxième nuit).

Exercice 2 On considère un ensemble de n atomes, radioactifs au temps $t = 0$. Chacun de ces atomes se désintègre au bout d'un temps aléatoire, après quoi il n'est plus radioactif. On note T_i le temps de désintégration du i^e atome pour $1 \leq i \leq n$. On suppose les variables T_i indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $a > 0$. Pour tout temps $t > 0$ on note $N(t)$ le nombre d'atomes encore radioactifs au temps t.

1. Rappeler l'expression de la densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre a.
2. Calculer la probabilité $p(t)$ que le i^e atome ne se soit pas encore désintégré au temps t.
3. Quelle est la loi de la variable $N(t)$? Quel théorème du cours permet de dire que $N(t)/n$ est presque égal à $p(t)$ (le nombre n est supposé très grand) ? Préciser pour quelles variables le théorème s'applique.
4. On appelle *demi-vie* radioactive le temps τ pour lequel $E(N(\tau)) = \frac{n}{2}$. Calculer τ en fonction de a.
5. Quelle proportion d'atomes radioactifs reste-t-il au temps $t = 2\tau$?

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.

1. Rappeler l'expression de $P(X = k)$ pour toute valeur possible k de X.
2. Donner les valeurs de $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X > 1)$ en fonction de n et p.
3. Calculer les développements limités de $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X > 1)$ à l'ordre 1 en p.
4. En déduire que lorsque p est proche de 0, la loi de X peut être approchée à l'ordre 1 par une loi de Bernoulli de paramètre np (on rappelera la définition de cette loi).

Un système numérique transmet des données sous forme d'un message de 7 bits (valeur 0 ou 1). Afin de repérer les erreurs de transmission, un 8^e bit appelé *bit de parité* est ajouté à la fin du message avant la transmission : si le nombre de 1 dans les 7 premiers bits est pair, le bit de parité est mis à zéro, sinon il est mis à 1. Lors de la transmission, chacun des 8 bits peut être altéré (sa valeur passe de 0 à 1 ou inversement), avec probabilité 10^{-6} et de façon indépendante des autres bits. Enfin en réception, la système signale une erreur lorsque le nombre de bits à 1 parmi les 7 premiers bits est en désaccord avec la valeur du bit de parité.

5. Soit N le nombre de bits du message (7 premiers bits) altérés lors de la transmission. Quelle est la loi exacte de N ? Par quelle loi peut-on l'approcher ? (on supposera que l'on fait cette approximation dans la suite)
6. Soit les événements :
   - E_m ="il y a une erreur de transmission sur le message (7 premiers bits),
   - E_p ="il y a une erreur de transmission du bit de parité,
   - D ="le système signale une erreur en réception".

   Exprimer D en fonction des événements E_M et E_p, puis calculer $P(D)$.
7. Calculer la probabilité que le système ne détecte pas d'erreur sachant qu'il y a une erreur dans le message.
8. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le message sachant que le système détecte une erreur.