Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen du 19/01/2012 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 On dispose d'un test de détection d'une maladie possédant les caractéristiques suivantes : si une personne est atteinte le test a 90% de chances d'être positif ; si la personne est saine le test a 10% de chances d'être positif. On suppose qu'une personne prise au hasard dans la population a 10% de chances d'être atteinte de cette maladie.

Calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard soit atteinte de la maladie si son test est positif.

Exercice 2 On lance deux fois un dé à six faces. Les deux lancers sont supposés indépendants. On note X le plus petit résultat obtenu et Y le plus grand.

1. Calculer la loi du couple (X, Y) et présenter le résultat sous forme d'un tableau. En déduire les lois marginales (lois de X et Y).
2. X et Y sont-elles des variables indépendantes ?

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par la fonction de densité

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t} \text{ si } t \in [1, 2], \\ \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

où a est une constante réelle.

1. Déterminer la valeur de a et représenter la fonction f sur un graphique.
2. Calculer les valeurs de $P(1 \leq X \leq \frac{3}{2})$ et $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 3)$ et donner l'interprétation graphique de ces quantités.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4 Un nombre n de composants électroniques sont mis en fonctionnement à la date 0 et on note X_i la date, comptée en années, à laquelle le $i^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On suppose que les X_i sont indépendants et suivent tous la même loi exponentielle de paramètre inconnu $\lambda > 0$. On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique des X_i.

1. Rappeler la définition de la loi exponentielle de paramètre λ, et la valeur de son espérance.
2. Vérifier que la loi des grands nombres s'applique pour les variables X_i et en déduire que $\bar{X}_n$ est un estimateur convergeant de $f(\lambda)$ pour une fonction f à déterminer. On admettra que $L_n = f^{-1}(\bar{X}_n)$ est un estimateur convergeant de λ.
3. Vérifier que le théorème central limite s'applique pour les variables X_i, et en déduire un intervalle de confiance au niveau $1-0.05$ pour l'estimateur L_n. On utilisera l'approximation suivante : si X est une variable de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, $P(-1.96 \leq X \leq 1.96) \simeq 0.95$.