Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2009-2010, parcours Informatique, INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

Examen partiel du 18 novembre 2009 - Correction

Exercice 1 Il y a deux façons de procéder, suivant la situation probabiliste de départ considérée. Considérons une personne quelconque, et notons les événements suivants :

- $G =$"la personne est atteinte de grippe",
- $G_B =$"la personne est atteinte de grippe B",
- $G_S =$"la personne est atteinte de grippe saisonnière",
- $D =$"la personne va décéder".

D'après les hypothèses, on a $G = G_S \cup G_B$ et $G_S \cap G_B = \emptyset$, et donc $P(G) = P(G_S) + P(G_B)$.

première méthode : On se place dans la situation où la personne est atteinte de grippe. Autrement dit $\Omega = G$ et donc $P(G) = 1$. Les données du problème se traduisent alors ainsi : $P(D) = 0.002$, $P(D|G_S) = 0.001$, $P(G_B) = 0.6$.
Alors

$$\begin{aligned} P(D|G_B) &= \frac{P(D\cap G_B)}{P(G_B)} = \frac{P(D) - P(D\cap G_S)}{P(G_B)} = \frac{P(D) - P(D|G_S)P(G_S)}{P(G_B)} \\ &= \frac{P(D) - P(D|G_S)(1-P(G_B))}{P(G_B)} \\ &= \frac{0.002 - 0.001 * (1-0.6)}{0.6} = 0.0027. \end{aligned}$$

deuxième méthode : On considère une personne quelconque (pas forcément atteinte de grippe). Les données s'écrivent alors :
$P(D|G) = 0.002$, $P(D|G_S) = 0.001$, $P(G_B|G) = 0.6$.
Alors

$$\begin{aligned} P(D|G_B) &= \frac{P(D\cap G_B)}{P(G_B)} = \frac{P(D\cap G) - P(D\cap G_S)}{P(G_B)} = \frac{P(D|G)P(G) - P(D|G_S)P(G_S)}{P(G_B)} \\ &= \frac{P(D|G)P(G) - P(D|G_S)(P(G) - P(G_B))}{P(G_B)}. \end{aligned}$$

Or $P(G_B) = P(G \cap G_B) = P(G_B|G)P(G)$, donc

$$\begin{aligned} P(D|G_B) &= \frac{P(D|G)P(G) - P(D|G_S)(P(G) - P(G_B|G)P(G))}{P(G_B|G)P(G)} \\ &= \frac{P(D|G) - P(D|G_S)(1 - P(G_B|G))}{P(G_B|G)} \\ &= \frac{0.002 - 0.001 * (1 - 0.6)}{0.6} = 0.0027. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Notons R_1 ="la première boule tirée est rouge" et R_2 ="la deuxième boule tirée est rouge". D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) + P(R_2|R_1^c)P(R_1^c).$$

   Or,
   •$P(R_1) = 1/3$ et $P(R_1^c) = 2/3$: on a 1 boule rouge et 2 boules vertes dans l'urne au début,
   •$P(R_2|R_1) = 1/3$: en effet, si la première boule est rouge, on a à nouveau 1 boule rouge et 2 boules vertes dans l'urne pour le deuxième tirage (puisqu'il y a remise dans ce cas).
   •$P(R_2|R_1^c) = 1/2$: si la première boule est verte, elle n'est pas remise dans l'urne, et on obtient donc 1 boule rouge et 1 boule verte pour le tirage suivant.
   Finalement,

$$P(R_2) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} + \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

2. $$P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_2|R_1)P(R_1)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{3} * \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}.$$

3. La première boule rouge apparaît forcément aux premier, deuxième ou troisième tirages. En effet si elle n'est toujours pas apparue au deuxème tirage, ça signifie qu'on a déjà tiré deux boules vertes, et donc qu'il ne reste plus qu'une boule rouge dans l'urne (puisque les boules vertes ne sont pas remises dans l'urne). Ainsi les valeurs possibles pour X sont $1, 2$ ou 3 : $\mathcal{S}(X) = \{1, 2, 3\}$. Calculons la loi de X :
   $P(X = 1) = P(R_1) = 1/3$,
   $P(X = 2) = P(R_2 \cap R_1^c) = P(R_2|R_1^c)P(R_1^c) = \frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,
   $P(X = 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.
4. Le rang d'apparition de la première boule verte peut être arbitrairement grand, puisque tant que seules des boules rouges sont tirées, il y a remise et donc toujours la même situation à chaque tirage : une boule rouge et deux boules vertes. Donc les valeurs possibles de Y sont tous les entiers positifs non nuls : $\mathcal{S}(Y) = \mathbb{N}^*$. Dans ce cas Y correspond au rang d'apparition du premier succés (tirage d'une boule verte) lors de la répétition d'expériences indépendantes et de mêmes probabilités de succés : à chaque tirage la probabilité de tirer une boule verte est de $2/3$. La loi de Y est donc la loi géométrique de paramètre $p = 2/3$. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$P(Y = n) = (1 - p)^{n-1}p = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3} = \frac{2}{3^n}.$$

Exercice 3

1. On a
$$f_{X_i}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2.
$$\begin{aligned} P(X_i \geq t_0) &= \int_{t_0}^{+\infty} f_{X_i}(t)dt = \lambda \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_{t_0}^{+\infty} \\ &= -\left[\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t_0}\right] = -(0 - e^{-\lambda t_0}) = e^{-\lambda t_0}. \end{aligned}$$

3. Soit A l'événement "au moins une des n bactéries survit jusqu'à t_0". On a
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i \geq t_0].$$
Donc
$$A^c = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i < t_0].$$
Les variables X_i étant indépendantes, les événements $[X_i < t_0]$ sont indépendants. Donc
$$P(A^c) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < t_0) = \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_i \geq t_0)) = \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda t_0}) = (1 - e^{-\lambda t_0})^n.$$
Ainsi
$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - (1 - e^{-\lambda t_0})^n.$$

4. N correspond au nombre de succés (ou chaque succés correspond à la survie d'une bactérie jusqu'à t_0) lors de la répétition de n expériences indépendantes (car les variables X_i sont indépendantes) de même probabilité de succès $p = P(X_i \geq t_0)$. Par conséquent la loi de N est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Pour tout entier k, $1 \leq k \leq n$, on a
$$P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} (e^{-\lambda t_0})^k (1 - e^{-\lambda t_0})^{n-k}.$$

5. La colonie est viable lorsque $E(N) \geq \frac{n}{2}$. Or $E(N) = np = ne^{-\lambda t_0}$ (espérance d'une loi binomiale). Donc la condition s'écrit
$$\begin{aligned} ne^{-\lambda t_0} \geq \frac{n}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t_0} \geq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda t_0 \geq \ln(\frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda t_0 \leq -\ln(\frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda t_0 \leq \ln(2). \end{aligned}$$