Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2008-2009, Introduction aux probabilités

Examen partiel du 26 novembre 2008

Exercice 1 On lance un dé equilibré.

1. Soit X le nombre de jets nécessaires pour obtenir un 6. Quelle est la loi de X ? Que vaut $P(X = 10)$?
2. Soit Y le nombre de jets nécessaires pour obtenir deux fois un 6. Déterminer la loi de Y et son espérance. (on demande ici de faire le calcul).

Exercice 2 On tape au hasard sur un clavier un très grand nombre n de lettres. On suppose que n est multiple de 5. La suite des lettres ainsi émise est notée $(L_1 L_2 \dots L_n)$ où les L_i sont des variables indépendantes de loi uniforme sur $\{A, B, C, \dots, Z\}$. On souhaite évaluer le nombre de fois que le mot "BINGO" est écrit dans la suite émise. Pour cela on va rassembler les lettres par groupes de 5 lettres consécutives de la façon suivante :

- premier groupement : les groupes $(L_1 L_2 L_3 L_4 L_5)$, $(L_6 L_7 L_8 L_9 L_{10})$, etc.
- deuxième groupement : les groupes $(L_2 L_3 L_4 L_5 L_6)$, $(L_7 L_8 L_9 L_{10} L_{11})$, etc.
- troisième groupement : les groupes $(L_3 L_4 L_5 L_6 L_7)$, $(L_8 L_9 L_{10} L_{11} L_{12})$, etc.

et ainsi de suite jusqu'au cinquième groupement. On note ensuite X_i le nombre de groupes du groupement i dont les lettres forment le mot "BINGO".

1. Combien y-a-t'il de groupes dans chacun des cinq groupements ?
2. Quelles sont les lois des X_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$? Quelles sont leurs espérances ?
3. Les X_i sont-elles des variables indépendantes ?
4. Soit X le nombre total de mots "BINGO" dans la suite des lettres. Calculer l'espérance de X.

Exercice 3 Pour déterminer si un patient est atteint d'une maladie, on réalise un test sur un échantillon de sang. Ce test n'est pas parfait ; on distingue en fait deux sortes d'erreurs :

- Si le patient est atteint de la maladie, le test est négatif (il déclare la personne saine) avec probabilité α.
- Si le patient est sain, le test est positif (il déclare la personne malade) avec probabilité β.

On sait de plus qu'une proportion p des patients testés est atteinte de la maladie.

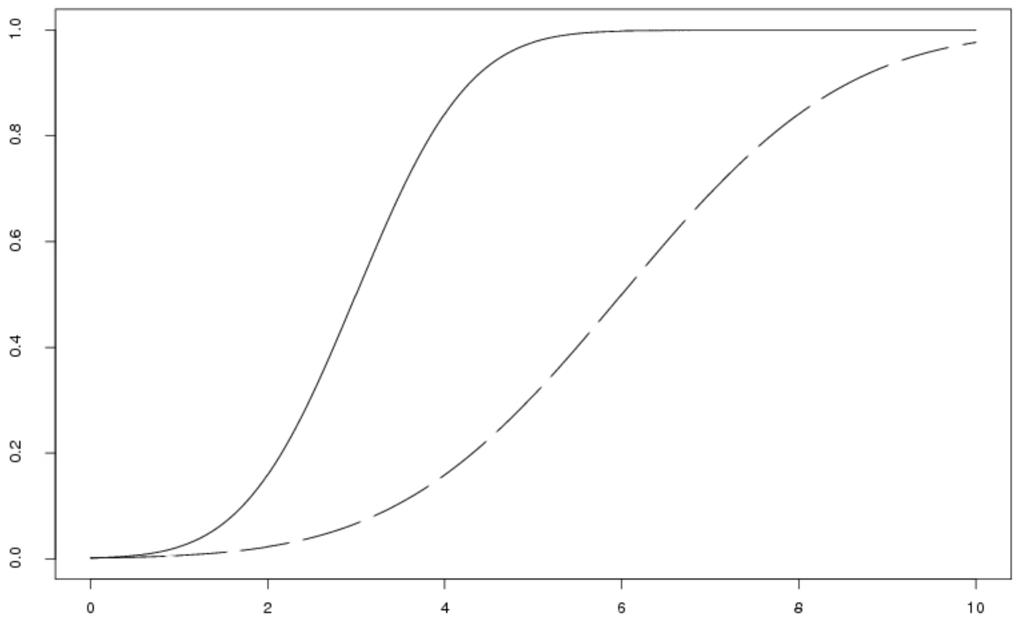
1. Ecrire la formule de Bayes permettant de calculer la probabilité que la personne soit malade sachant que son test est négatif, puis exprimer le résultat en fonction de α, β et p. Calculer de même la probabilité que la personne soit saine sachant que son test est négatif.

Le test est en fait adaptable, c'est-à-dire que l'on peut fixer la valeur de α comme on le désire. Par contre la valeur de β est alors une fonction décroissante de α, de sorte qu'on ne peut pas diminuer en même temps ces deux erreurs. On suppose en fait qu'on a une relation de la forme $\beta = (1-\alpha)^s$ où $s > 0$ est connu. Pour fixer une valeur optimale de α, on définit une variable R, appelée risque, de la manière suivante :
- Si le patient est malade et que son test est négatif, alors $R = 10$,
- si le patient est sain et que son test est positif, alors $R = 1$,
- dans les autres cas $R = 0$.

2. Déterminer la loi de R et calculer son espérance en fonction de α, s et p.
3. Calculer la valeur de α permettant de minimiser $E(R)$, en fonction de s et p.

A présent on ne suppose plus la relation $\beta = (1-\alpha)^s$, mais que le résultat du test médical dépend de la mesure du taux X d'une certaine molécule dans le sang. La règle est la suivante :
- Si $X \leq \lambda$ alors le test est négatif,
- Si $X > \lambda$ alors le test est positif,

où λ est une valeur qu'il faut fixer. La loi de la mesure X dépend du fait que la personne est saine ou malade. Les courbes de la fonction de répartition de X dans les deux cas sont représentées sur la figure suivante.



4. Expliquer comment trouver sur le graphique, à partir d'une valeur fixée de λ, les valeurs de α et β. Déterminer graphiquement la valeur de λ telle que $\alpha = 0.1$ et donner la valeur de β correspondante.