Exercice 1

1. loi binomiale $B(n,p)$; $E(X) = np = 3$; $V(X) = np(1-p) = 2.99997$
2. n grand et p petit, donc on peut approcher la loi $B(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np = 3$. Si X suit $\mathcal{P}(3)$, alors $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
3. $P(X \leq 5) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) = 0.05+0.15+0.22+0.22+0.17+0.1 = 0.91$.

Exercice 2

1. A ="il franchit la barre de 2m au premier saut" $= [H_1 > 2]$, où H_1 désigne la hauteur atteinte au premier essai. $P(A) = P(H_1 > 2) = \frac{2.35-2}{2.35-1.95} = \frac{7}{8}$ car H_1 suit la loi uniforme sur $[1.95, 2.35]$.
2. B ="il n'a pas franchi la barre après 3 essais"$=[H_1 < 2] \cap [H_2 < 2] \cap [H_3 < 2]$, où H_1, H_2, H_3 désignent les hauteurs atteintes aux 3 essais. Les sauts sont indépendants, donc $P(B) = P(H_1 < 2) \times P(H_2 < 2) \times P(H_3 < 2) = \left(\frac{1}{8}\right)^3$.
   Notons S_0 ="il réussit à passer la barre des 2m"="il a franchit la barre des 2m à l'un des trois essais"$=B^c$. Donc $P(S_0) = 1 - P(B) = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^3$.
3. Soit S_1 ="il passe la barre des 2m10". On cherche $P(S_1|S_0)$. On se place dans la situation où S_0 est réalisé : il a passé la barre des 2m et il se retrouve avec 3 essais devant la barre des 2m10. Puisque les essais sont indépendants, la situation est identique à celle du début, seule la hauteur de la barre a changé. On aura donc $P(S_1|S_0) = 1 - P(H < 2.10)^3$ avec $P(H < 2.10) = \frac{2.10-1.95}{2.35-1.95} = \frac{3}{8}$; donc $P(S_1|S_0) = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^3$.
4. $X \in \{0, 2, 2.10, 2.20, 2.30\}$ car il ne peut pas sauter plus haut que 2.35 mètres. $X = 0$ correspond au cas où il ne parvient pas à passer la barre de 2m.
5. $\bullet P(X=0) = P(S_0^c) = P(B) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$.
   $\bullet P(X=2) = P(S_0 \cap S_1^c) = P(S_0) - P(S_0 \cap S_1) = P(S_0) - P(S_1|S_0)P(S_0) = \left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^3\right)\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{511}{512} \times \frac{27}{512}$.
   $\bullet P(X=2.10) = P(S_1 \cap S_2^c) = P(S_1) - P(S_2|S_1)P(S_1)$, où S_2 ="il passe la barre des 2m20". Par le même raisonnement qu'au 3), on obtient $P(S_2|S_1) = 1 - P(H < 2.20)^3 = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3$. De plus $P(S_1) = P(S_0 \cap S_1) = P(S_1|S_0)P(S_0) = \left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^3\right)$. Donc $P(X=2.10) = \left(\frac{5}{8}\right)^3\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^3\right) = \frac{125}{512} \times \frac{485}{512} \times \frac{511}{512}$.
   $\bullet P(X=2.20) = P(S_2 \cap S_3^c) = P(S_2) - P(S_3|S_2)P(S_2)$, où S_3 ="il passe la barre des 2m30". On a $P(S_3|S_2) = 1 - P(H < 2.30)^3 = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3$. De plus $P(S_2) = P(S_1 \cap S_2) = P(S_2|S_1)P(S_1) = \left(1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^3\right)$. Donc $P(X=2.20) = \left(\frac{7}{8}\right)^3\left(1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^3\right) = \frac{343}{512} \times \frac{387}{512} \times \frac{485}{512} \times \frac{511}{512}$.
   $\bullet P(X=2.30) = P(S_3) = P(S_3 \cap S_2) = P(S_3|S_2)P(S_2)$
   $= \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{3}{8}\right)^3\right)\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^3\right) = \frac{169}{512} \times \frac{387}{512} \times \frac{485}{512} \times \frac{511}{512}$.

$\bullet E(X) = 0 \times P(X=0) + 2 \times P(X=2) + 2.10 \times P(X=2.10) + 2.20 \times P(X=2.20) + 2.30 \times P(X=2.30)$
$= 2 \times \frac{511}{512} \times \frac{27}{512} + 2.10 \times \frac{125}{512} \times \frac{485}{512} \times \frac{511}{512} + 2.20 \times \frac{343}{512} \times \frac{387}{512} \times \frac{485}{512} \times \frac{511}{512} + 2.30 \times \frac{169}{512} \times \frac{387}{512} \times \frac{485}{512} \times \frac{511}{512}$.

Exercice 3

1.
$$f_X(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad f_Y(t) = \begin{cases} 2e^{-2t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} \int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases},$$

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)dt = \begin{cases} \int_0^x 2e^{-2t}dt = [-e^{-2t}]_0^x = 1 - e^{-2x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}.$$

3. $[S \leq x] = [X \leq x] \cup [Y \leq x]$ et $[T \leq x] = [X \leq x] \cap [Y \leq x]$.
4. $F_T(x) = P(T \leq x) = P([X \leq x] \cap [Y \leq x])$.
   X et Y étant indépendantes, on a
$$F_T(x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = F_X(x)F_Y(x)$$
$$= \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-2x}) = 1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}.$$
   La densité de T vaut donc
$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}.$$

5. $F_S(x) = P(T \leq x) = P([X \leq x] \cup [Y \leq x]) = 1 - P([X \leq x]^c \cap [Y \leq x]^c)$.
   X et Y étant indépendantes, on a
$$F_S(x) = 1 - P([X \leq x]^c)P([Y \leq x]^c) = 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x))$$
$$= \begin{cases} 1 - e^{-x}e^{-2x} = 1 - e^{-3x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}.$$
   La densité de S vaut donc
$$f_S(t) = F_S'(t) = \begin{cases} 3e^{-3t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}.$$

6.
$$P(X > x|S \leq x) = \frac{P([X > x] \cap [S \leq x])}{P(S \leq x)}.$$

Or $[X > x] \cap [S \leq x] = [X > x] \cap [Y \leq x]$: en effet si le système en série est en panne avant l'instant x, alors que $X > x$, c'est que forcément $Y \leq x$. On peut aussi voir ça par le calcul :

$$[X > x] \cap [S \leq x] = [X > x] \cap ([X \leq x] \cup [Y \leq x] = ([X > x] \cap [X \leq x]) \cup ([X > x] \cap [Y \leq x])$$

$$= (\emptyset) \cup ([X > x] \cap [Y \leq x]) = [X > x] \cap [Y \leq x].$$

Donc

$$P(X > x|S \leq x) = \frac{P([X > x] \cap [S \leq x])}{P(S \leq x)} = \frac{P(X > x)P(Y \leq x)}{P(S \leq x)} \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes)}$$

$$= \frac{(1 - F_X(x))F_Y(x)}{F_S(x)} = \frac{e^{-x}(1 - e^{-2x})}{1 - e^{-3x}}.$$

7.
$$P(T > t|X \leq x) = \frac{P([T > t] \cap [X \leq x])}{P(X \leq x)}.$$

Or $[T > t] \cap [X \leq x] = [Y > t] \cap [X \leq x]$: en effet si le système en parallèle est en panne après l'instant t, alors que $X \leq x$, c'est que forcément $Y > t$. On peut aussi voir ça par le calcul :

$$[T > t] \cap [X \leq x] = [T \leq t]^c \cap [X \leq x] = ([X \leq t] \cap [Y \leq t])^c \cap [X \leq x]$$

$$= ([X \leq t]^c \cup [Y \leq t]^c) \cap [X \leq x] = ([X \leq t]^c \cap [X \leq x]) \cup ([Y \leq t]^c \cap [X \leq x])$$

$$= (\emptyset) \cup ([Y \leq t]^c \cap [X \leq x]) = [Y \leq t]^c \cap [X \leq x] = [Y > t] \cap [X \leq x].$$

Donc

$$P(T > t|X \leq x) = \frac{P([Y > t] \cap [X \leq x])}{P(X \leq x)}$$

$$= \frac{P([Y > t]^c)P(X \leq x)}{P(X \leq x)} \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)}$$

$$= P([Y > t]^c) = 1 - F_Y(t) = e^{-2t}$$