Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2015-2016, Introduction aux probabilités

Feuille de TD n°6 : lois de couples, lois conditionnelles

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires dont les lois sont données par

$$P(X=1)=0.6 \qquad P(Y=1)=0.4$$
$$P(X=2)=0.2 \qquad P(Y=2)=0.5$$
$$P(X=3)=0.2 \qquad P(Y=3)=0.1$$

1. La loi du couple (X, Y) est donnée par l'un des tableaux suivants. Lequel ?

A

y \ x	1	2	3
1	0.5	0	0.1
2	0.2	0.1	0
3	0.1	0	0

B

y \ x	1	2	3
1	0.5	0	0.1
2	0	0.1	0
3	0.1	0	0

C

y \ x	1	2	3
1	0.2	0.1	0.1
2	0.3	0.1	0.1
3	0.1	0	0

D

y \ x	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

2. Quel serait le tableau de la loi du couple (X, Y) si les variables X et Y étaient indépendantes ?
3. Parmi les autres tableaux, déterminer lesquels peuvent correspondre à la loi d'un couple de variables. Lorsque c'est le cas, donner les lois marginales correspondantes.

Exercice 2 On lance n fois un dé à six faces et on note : X le nombre de fois que l'on obtient un résultat pair, et Y le nombre de fois que l'on obtient un résultat inférieur ou égal à 3.

1. Quelles sont les lois de X et Y ?
2. Calculer $P(X=0, Y=0)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Pour $n=1$, déterminer la loi du couple (X, Y) (on donnera les résultats sous forme de tableau)

Exercice 3 On lance deux fois un dé à six faces. Les deux lancers sont supposés indépendants. On note X le plus petit résultat obtenu et Y le plus grand.

1. Calculer la loi du couple (X, Y) et présenter le résultat sous forme d'un tableau. En déduire les lois marginales (lois de X et Y).
2. X et Y sont-elles des variables indépendantes ?

Exercice 4 On s'intéresse au nombre de voitures passant par un péage d'autoroute durant une journée. Le nombre de véhicules allant de Paris vers Lyon suit une loi de Poisson de paramètre λ et le nombre de véhicules allant de Lyon vers Paris suit une loi de Poisson de paramètre μ. Ces deux variables sont supposées indépendantes.
Sachant que n véhicules ont franchi le péage, quelle est la probabilité pour que k d'entre eux viennent de Paris ? Reconnaître la loi obtenue.

Exercice 5 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et dont les lois sont données par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{2^k}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(Y = X)$, $\mathbb{P}(X < Y)$.
2. Soit $Z = \min(X, Y)$ et $T = X - Y$. Donner la loi du couple (Z, T).
   Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ des variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $q \in]0, 1[$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

   $$Z_i = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i = 1 \text{ et } Y_i = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Quelles sont les lois des variables Z_i ? Les variables Z_i sont-elles indépendantes ?
2. On suppose que X est régie par une loi binomiale de paramètres n et p, et que pour chaque k fixé (avec $0 \leq k \leq n$), la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$ est une loi binomiale de paramètres k et q. Déterminer la loi de Y.
3. Deux tests de détection d'une maladie sont disponibles. Le premier déclare malade un individu sain avec probabilité p, le second avec probabilité q. Si un individu est déclaré malade par le premier test on pratique le second. Sur un groupe de n personnes saines quelle est la loi du nombre de personnes déclarées malades à tort ?

Exercice 7 Une secrétaire donne n appels téléphoniques ($n \geq 1$ est fixé). A chaque appel, la probabilité de joindre son correspondant est $p \in]0, 1[$. On suppose que les résultats sont indépendants. Après ces premiers appels, le lendemain, elle rappelle les correspondants qu'elle n'a pas pu joindre. Soit X le nombre de personnes jointes le premier jour et Y le nombre total de personnes jointes.

1. Quelle est la loi de X ? Déterminer aussi pour $h \leq k \leq n$ la valeur de $\mathbb{P}(Y = k | X = h)$.
2. En déduire la loi de Y. Retrouver ce résultat par un argument direct.

Exercice 8 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(Y = n) = \frac{n+1}{2^{n+2}}$$

$$\mathbb{P}(X = k | Y = n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k \geq n+1. \end{cases}$$

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Montrer que $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$.
3. Les variables aléatoires X et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et que la loi conditionnelle de Y sachant que $\{X = n\}$ est la loi binomiale de paramètre (n, p), où $0 < p < 1$.

1. Trouver la loi de Y. Donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y). Calculer l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire XY sachant $\{X = n\}$.
3. Trouver la loi de probabilité conditionnelle de la variable aléatoire $Z = X - Y$ sachant $\{Y = m\}$.