Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2015-2016, parcours Informatique, INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

Feuille de TD n°4 : Lois discrètes

Loi de Bernoulli

Exercice 1 Dans la mémoire d'un ordinateur, on appelle quartet un ensemble de 4 bits (prenant chacun la valeur 0 ou 1). On suppose que la mémoire de l'ordinateur n'a pas été initialisée. Ainsi, tous les bits de la mémoire se trouvent, indépendamment, dans l'état 1 avec probabilité $p \in [0,1]$. On considère un quartet pris au hasard et on note X le nombre entier dont ce quartet est l'écriture en base 2.

1. Quelles valeurs peut prendre X ?
2. Calculer la probabilité que X soit impair puis $\mathbb{P}(X > 3)$.

Exercice 2 On remplit une matrice 2×2 avec des 0 ou des 1. Chaque entrée est indépendante et vaut 1 avec probabilité $p \in [0,1]$. On note X le déterminant de cette matrice et Y sa trace.

1. Donner la loi de X et de Y.
2. Calculer la probabilité que 0 soit une valeur propre de la matrice.

Loi binomiale

Exercice 3 Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

1. Donner la loi de X et ses paramètres.
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $4 - X$?
3. On s'intéresse aux familles de quatre enfants. En supposant les naissances indépendantes et l'équiprobabilité garçon/fille, quelle est la loi du nombre de filles ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir des enfants des deux sexes ? Celle de n'avoir que des filles ou que des garçons ?
5. Quelles sont l'espérance et la variance du nombre de filles ?

Exercice 4 Au bowling, Pierre a une probabilité 3/4 de faire tomber toutes les quilles ("strike"). Dans une soirée il lance 18 boules et on considère les lancers indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de "strike" réussis par Pierre.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer la probabilité pour que Pierre réussisse dix "strike".
3. Quelle est l'espérance du nombre de "strike" réussis dans une soirée, sa variance ?

Exercice 5 Une compagnie de transports possède $n = 15$ cars, tous en état de marche en début de journée. La probabilité pour qu'un car tombe en panne un tel jour est $p = 0,1$.

1. Soit X le nombre de cars tombant en panne ce jour. Quelle est la loi de probabilité de X. En moyenne combien de cars tombent en panne un tel jour ?
2. Un car tombé en panne sera reparé dans la journée si un réparateur est libre, la réparation prenant le reste de la journée. Sachant que la compagnie emploie 2 réparateurs, quelle est la probabilité pour que tous les cars soient en état de marche le lendemain matin ?

Loi géométrique

Exercice 6 On pense que la probabilité qu'un bon système d'exploitation tombe en panne durant une journée d'utilisation est $p = 0,01$.

1. Combien de jours doit-on attendre pour que la probabilité d'observer au moins une panne du système soit supérieure ou égale à $1/2$?
2. Quelle est l'espérance du temps avant une panne du système ?

Exercice 7 On lance un dé equilibré. Soit X le nombre de jets nécessaires pour obtenir deux fois un 6. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 8 Un trousseau de 10 clefs comporte une seule clef ouvrant un appartement. Un ivrogne veut ouvrir la porte de cet appartement. Chaque fois qu'il tire une clef et qu'elle ne convient pas, il la remet dans le trousseau. Soit X le nombre de tirages à effectuer avant d'ouvrir.

1. Calculer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
2. Quel est le nombre minimal de tentatives que doit faire cet homme pour être sûr d'ouvrir la porte avec une probabilité supérieure à $1/2$?

Loi quelconque

Exercice 9 Une usine fabrique des écrous. La probabilité qu'un écrou soit défectueux est $p = 0,0015$.

1. Quelle est la probabilité qu'une boîte de 100 écrous contienne au moins un écrou défectueux ?
2. On examine 5 boîtes d'écrous prises au hasard en sortie d'usine. Quelle est la probabilité qu'au moins une d'entre elles contienne au moins un écrou défectueux ?

Exercice 10 Une urne contient n boules blanches et m boules noires. On tire des boules une par une avec remise jusqu'à l'apparition d'une noire. On note X le nombre de tirages nécessaires.

1. Quelle est la loi de X ? Que vaut $\mathbb{P}(X \geq k)$?
2. Déterminer l'espérance et la variance du nombre de tirages.

3. On tire maintenant jusqu'à ce que l boules noires apparaissent (toujours avec remise) et on note Y le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de Y.
4. Montrer que $Y = X_1 + \ldots + X_l$ où les X_i sont indépendantes et de même loi que X. En déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 11 On lance un dé non pipé jusqu'à obtenir un "1". On considère l'événement

$$B = \{\text{On n'obtient que des chiffres impairs avant le premier as}\}.$$

Calculer $\mathbb{P}(B)$ (on pourra introduire la variable aléatoire N égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier as).